

## RÈGLES DE CALCUL (1)

### §1. Fractions

1 Simplifier :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{10}{25}, & \text{b) } \frac{14}{49}, & \text{c) } \frac{12}{35}, & \text{d) } \frac{21}{70}, \\ \text{e) } \frac{13}{26}, & \text{f) } \frac{18}{81}, & \text{g) } \frac{24}{42}, & \text{h) } \frac{75}{42}, \\ \text{i) } \frac{64}{56}, & \text{j) } \frac{60}{38}, & \text{k) } \frac{68}{51}, & \text{l) } \frac{30}{54}. \end{array}$$

2 Calculer :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, & \text{b) } \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, & \text{c) } \frac{2}{3} + \frac{2}{5}, \\ \text{d) } \frac{1}{6} - \frac{1}{12}, & \text{e) } \frac{5}{6} + \frac{6}{5}, & \text{f) } \frac{3}{2} - \frac{1}{4}. \end{array}$$

3 Même exercice :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{2}{3} - \frac{1}{4}, & \text{b) } \frac{4}{5} - \frac{3}{7}, & \text{c) } \frac{6}{5} - \frac{2}{3}, \\ \text{d) } \frac{1}{6} + \frac{1}{8}, & \text{e) } \frac{1}{10} + \frac{2}{11}, & \text{f) } \frac{7}{4} - \frac{5}{3}. \end{array}$$

4 Même exercice :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{10}{21} + \frac{4}{7}, & \text{b) } \frac{9}{16} + \frac{5}{24}, & \text{c) } \frac{5}{12} + \frac{5}{18}, \\ \text{d) } \frac{7}{36} - \frac{9}{40}, & \text{e) } \frac{50}{63} - \frac{31}{42}, & \text{f) } \frac{3}{200} - \frac{1}{180}. \end{array}$$

5 Même exercice :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 1 + \frac{1}{2}, & \text{b) } 2 + \frac{1}{3}, & \text{c) } 3 + \frac{1}{4}, \\ \text{d) } 1 - \frac{2}{3}, & \text{e) } 2 - \frac{3}{4}, & \text{f) } 3 - \frac{7}{6}. \end{array}$$

6 Même exercice :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, & \text{b) } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, & \text{c) } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \\ \text{d) } \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}, & \text{e) } \frac{1}{5} + \frac{3}{7} + \frac{5}{9}, & \text{f) } \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{30}. \end{array}$$

7 Simplifier au maximum :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{5}{6}, & \text{b) } \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, & \text{c) } \frac{2}{3} - \frac{5}{7} \times \frac{3}{5}, \\ \text{d) } \frac{2}{3} \times \frac{9}{4} - \frac{4}{5}, & \text{e) } \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \times \frac{5}{6}, & \text{f) } \frac{3}{8} + \frac{5}{9} - \frac{9}{10}. \end{array}$$

8 Même consigne :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{4}{5} + \frac{3}{2} \times \frac{5}{6}, & \text{b) } \frac{4}{3} \times \frac{1}{9} \times \frac{5}{4}, & \text{c) } \frac{9}{5} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{50}, \\ \text{d) } \frac{7}{8} + \frac{3}{8} - \frac{4}{5}, & \text{e) } \frac{1}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{5}{9}, & \text{f) } \frac{1}{3} + \frac{15}{9} \times \frac{1}{8}. \end{array}$$

9 Même consigne :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{9}{4} - \frac{3}{6} \times \frac{9}{6}, & \text{b) } \frac{6}{7} \times \frac{1}{4} - \frac{3}{7}, & \text{c) } \frac{4}{3} - \frac{5}{4} \times \frac{3}{5}, \\ \text{d) } \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{5}, & \text{e) } \frac{7}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{9}, & \text{f) } \frac{9}{5} \times \frac{8}{9} - \frac{12}{25}. \end{array}$$

10 Écrire sous la forme d'une fraction irréductible :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}}, & \text{b) } \frac{1 + \frac{3}{1}}{1 + \frac{5}{5}}, & \text{c) } \frac{1 - \frac{3}{1}}{1 - \frac{4}{4}}, \\ \text{d) } \frac{1 + \frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{12}}, & \text{e) } \frac{2 - \frac{3}{4}}{2 - \frac{4}{3}}, & \text{f) } \frac{2 + \frac{1}{15}}{1 + \frac{1}{16}}. \end{array}$$

11 Même consigne :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{4} + \frac{8}{8}}, & \text{b) } \frac{\frac{1}{3} + \frac{10}{1}}{\frac{12}{12} + \frac{25}{25}}, & \text{c) } \frac{\frac{1}{10} - \frac{3}{1}}{\frac{3}{3} - \frac{10}{10}}, \\ \text{d) } \frac{\frac{10}{6} + \frac{20}{3}}{\frac{6}{3} - \frac{3}{4}}, & \text{e) } \frac{\frac{9}{12} + \frac{1}{7}}{\frac{3}{7} - \frac{5}{12}}, & \text{f) } \frac{\frac{10}{7} + \frac{13}{1}}{\frac{7}{30} + \frac{14}{6}}. \end{array}$$

12 Écrire sous la forme d'une seule fraction :

- a)  $1 + \frac{x}{2}$ ,      b)  $x + \frac{1}{2}$ ,      c)  $1 + \frac{x}{3}$ ,  
d)  $x + \frac{2}{3}$ ,      e)  $2 + \frac{3x}{4}$ ,      f)  $2x - \frac{3}{4}$ .

13 Même consigne :

- a)  $\frac{x+1}{2} + 1$ ,      b)  $\frac{x}{3} + \frac{1}{2}$ ,      c)  $\frac{x+1}{2} + \frac{x}{3}$ ,  
d)  $x - 1 + \frac{1}{4}$ ,      e)  $\frac{x}{2} - \frac{3-x}{4}$ ,      f)  $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5}$ .

14 Même consigne :

- a)  $\frac{a+1}{2} + \frac{b}{3}$ ,      b)  $\frac{ab}{3} + \frac{1}{ab}$ ,      c)  $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$ ,  
d)  $a+b - \frac{a-b}{4}$ ,      e)  $\frac{a}{2b} - \frac{3b}{a}$ ,      f)  $\frac{a}{a+b} + \frac{a+b}{b}$ .

15 Même consigne :

- a)  $\frac{t}{2} + \frac{2}{t}$ ,      b)  $\frac{1}{t^2} + \frac{t^2}{2}$ ,      c)  $\frac{t+1}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}}$ ,  
d)  $t + \frac{1}{2t}$ ,      e)  $\frac{\sqrt{t}}{2t} - \frac{2t}{\sqrt{t}}$ ,      f)  $\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}$ .

## §2. Substitutions et évaluations

16 On considère  $A = x^2 + x + 1$ . Donner la valeur de A lorsque  $x$  est égal à

- a) 1,      b) 2,      c) 10,  
d) -1,      e) -2,      f) 0,5.

17 On considère  $B = 2x^2 - 3x + 5$ . Donner la valeur de B lorsque  $x$  est égal à

- a)  $1/2$ ,      b)  $-1/3$ ,      c)  $1/4$ ,      d)  $-2/5$ ,  
e)  $\sqrt{2}$ ,      f)  $-\sqrt{3}$ ,      g)  $\sqrt{2} + 1$ ,      h)  $1 - \sqrt{3}$ .

18 On considère  $C = x^3 - x^2 + x - 1$ . Donner la valeur de C lorsque  $x$  est égal à

- a)  $1/4$ ,      b)  $-1/4$ ,      c)  $1/3$ ,      d)  $-3/2$ ,  
e)  $\sqrt{3}$ ,      f)  $-\sqrt{5}$ ,      g)  $\sqrt{3} + 1$ ,      h)  $\sqrt{2}/3$ .

19 On considère  $D = 2x^2 - 4x + 3$ . Donner la valeur de D lorsque  $x$  est égal à

- a)  $11/3$ ,      b)  $10/4$ ,      c)  $9/5$ ,      d)  $-8/11$ ,  
e)  $1/20$ ,      f)  $1/\sqrt{2}$ ,      g)  $-1/\sqrt{3}$ ,      h)  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ .

20 On considère  $E = \frac{x+1}{x-1}$ . Donner la valeur de E lorsque  $x$  est égal à

- a)  $1/2$ ,      b)  $-1/3$ ,      c)  $3/4$ ,      d)  $-1/4$ ,  
e)  $2/5$ ,      f)  $-3/7$ ,      g)  $5/8$ ,      h)  $-2/7$ .

21 Soit  $f(x) = x^2 + 1$ .

a) Calculer  $f(2)$ , puis  $f(f(2))$ , puis  $f(f(f(2)))$ .

b) Simplifier  $f(x) + 1$  et  $f(x + 1)$ . Est-ce la même chose ?

c) Simplifier  $f(x^2 + 1)$  et  $f(x)^2 + 1$ . Est-ce la même chose ?

d) Simplifier  $f(f(x))$ , puis  $f(f(f(x)))$ .

22 Soit  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$ .

a) Calculer  $f(1)$  et  $f(2)$ .

b) Calculer  $f(1/2)$  et  $f(3/4)$ .

c) Calculer  $f(-1/2)$  et  $f(-9/10)$ .

23 Mettre sous la forme d'une fraction irréductible :

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}}$$

À quel nombre est-elle à peu près égale ?

24

a) Mettre sous la forme d'une fraction irréductible :

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}$$

b) Puis écrire un programme qui trouve la fraction irréductible  $a/b$  résultant du calcul ci-dessus lorsqu'on le prolonge jusqu'à avoir écrit  $n$  fois le nombre 2.

c) De quel célèbre obtient-on une valeur approchée ?

## §3. Distributions

25 Développer et réduire :

- a)  $(x+1)(3x-1)$ ,      b)  $(x+2)(4-5x)$ ,  
c)  $(2x+1)(3x+2)$ ,      d)  $(2x+3)(x-1)$ ,  
e)  $(2x-3)(x-2)$ ,      f)  $(3x-2)(3x+1)$ .

26 Même consigne :

- a)  $(3+2x)(3x+2)$ ,      b)  $(5x+7)(8x-2)$ ,  
c)  $(3x-4)(2x-5)$ ,      d)  $(5x+6)(3x+6)$ ,  
e)  $(5x-2)(7x-1)$ ,      f)  $(x+4)(5x-11)$ .

27 Même consigne :

- a)  $(11x+1)(10x-9)$ ,      b)  $(7x+1)(3x+7)$ ,  
c)  $(x+1)(1-x^2)$ ,      d)  $(8x+1)(3x^2-1)$ ,  
e)  $(x+1)(2x-1)$ ,      f)  $(4x^2+1)(5x-1)$ .

**28** 📌 Même consigne :

- a)  $(x^2 + 1)(3x - 8)$ ,    b)  $(2x + 1)(3x^2 - 10)$ ,  
c)  $(x + 10)(5 - 9x)$ ,    d)  $(2x^2 + 7)(4x - 1)$ ,  
e)  $(x + 7)(3x - x^3)$ ,    f)  $(3x^2 + 2x)(3x^2 + 5)$ .

**29** 📌 Même consigne :

- a)  $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ ,    b)  $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)$ ,  
c)  $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)$ ,    d)  $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right)$ ,  
e)  $\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{2}\right)$ ,    f)  $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{2}\right)$ .

**30** 📌 Même consigne :

- a)  $(a + b)(3a + b)$ ,    b)  $(b - a)(3a - b)$ ,  
c)  $(a + 2b)(3a - 2b)$ ,    d)  $(3a + 2b)(b - a)$ ,  
e)  $(2a - 4b)(3a + b)$ ,    f)  $(7a - 5b)(4a + 3b)$ .

**31** 📌 Même consigne :

- a)  $(a + b)(c + d)$ ,    b)  $(a - b)(c - d)$ ,  
c)  $(a + d)(2b + c)$ ,    d)  $(ab + cd)(ad - bd)$ ,  
e)  $(3a + 4b)(ab - a)$ ,    f)  $(a - b^2)(a^2 - b)$ .

**32** 📌 Factoriser :

- a)  $(x + 1)^2 + 2(x + 1)$ ,  
b)  $(x - 3)(x + 2) + 4(x - 3)$ ,  
c)  $(x + 3)(x - 1) + 2x + 6$ ,  
d)  $(2x + 1)(x + 3) - x^2 + 9$ ,  
e)  $(x + 1)^2 - (x + 2)(x + 1)$ ,  
f)  $x^2 + 2x + x + 2$ .

**33** 📌 Même consigne :

- a)  $(x + 3)^2 + x^2 - 9$ ,  
b)  $(x - 3)(x + 2) + x^2 + 4x + 4$ ,  
c)  $(2x + 3)(x - 1) + 4x - 4$ ,  
d)  $(2x + 1)^2 - 4x^2 + 1$ ,  
e)  $(2x - 5)^2 - (6x - 15)(x + 14)$ ,  
f)  $x^3 + 25x^2 + x + 25$ .

**34** 📌 On étudie dans cet exercice la technique des *factorisations partielles*. Elle sert à factoriser certaines expressions de la forme

$$x^2 \pm sx + p$$

lorsque  $p$  est le produit de deux nombres dont  $s$  est la somme. Voyons un exemple : dans  $x^2 + 7x + 12$ , on a  $12 = 3 \times 4$  et  $7 = 3 + 4$ . On peut alors « casser » le  $7x$  en deux et factoriser :

$$\begin{aligned}x^2 + 7x + 12 &= x^2 + 3x + 4x + 12 \\ &= x \times (x + 3) + 4 \times (x + 3) \\ &= (x + 4) \times (x + 3).\end{aligned}$$

Un autre exemple :  $-10 = 5 \times (-2)$  et  $3 = 5 + (-2)$  donc

$$\begin{aligned}x^2 + 3x - 10 &= x^2 + 5x - 2x - 10 \\ &= x \times (x + 5) - 2 \times (x + 5) \\ &= (x - 2) \times (x + 5).\end{aligned}$$

Appliquer (lorsque c'est possible) cette technique dans les cas suivants :

- a)  $x^2 - 7x + 12$ ,    b)  $x^2 + x - 2$ ,  
c)  $x^2 + x - 6$ ,    d)  $x^2 + 5x + 6$ ,  
e)  $x^2 + 10x + 21$ ,    f)  $x^2 - 4x - 21$ .

**35** 📌 Même consigne :

- a)  $x^2 + x - 42$ ,    b)  $x^2 + x + \frac{2}{9}$ ,  
c)  $3x^2 + 8x + 5$ ,    d)  $x^2 + \frac{41}{20}x + 100$ ,  
e)  $x^2 - x + \frac{1}{4}$ ,    f)  $x^2 - x - n(n + 1)$ .

## §4. Identités remarquables

**36** 📌 Développer :

- a)  $(x + 1)^2$ ,    b)  $(2x + 3)^2$ ,    c)  $(x - 3)^2$ ,  
d)  $(2x - 1)^2$ ,    e)  $(a + 2b)^2$ ,    f)  $(3a + 2b)^2$ .

**37** 📌 Même consigne :

- a)  $(4x + 8)^2$ ,    b)  $(4x + 9)^2$ ,    c)  $(2x - 3y)^2$ ,  
d)  $(2y + x^2)^2$ ,    e)  $(x^2 + y^2)^2$ ,    f)  $(x + y + z)^2$ .

**38** 📌 Même consigne :

- a)  $(x + 10)^2$ ,    b)  $(2x + 9)^2$ ,    c)  $(3x - 8)^2$ ,  
d)  $(4x - 7)^2$ ,    e)  $(5x + 6)^2$ ,    f)  $(6x + 5y)^2$ .

**39** 📌 Factoriser :

- a)  $x^2 - 4$ ,    b)  $x^2 - 3$ ,    c)  $2x^2 - 8$ ,  
d)  $3x^2 - 9$ ,    e)  $(x + 1)^2 - 1$ ,    f)  $4x^2 - 1$ .

**40** 📌 Même consigne :

- a)  $16x^2 - 4$ ,    b)  $4x^2 - 100$ ,    c)  $9x^2 - 36$ ,  
d)  $5x^2 - 10$ ,    e)  $(x + 4)^2 - 4$ ,    f)  $4(x + 1)^2 - 9$ .

41 Même consigne :

- a)  $a^2 - 400$ ,      b)  $a^2 - b^4$ ,      c)  $a^2 - 2b^2$ ,  
d)  $2a^2 - 3b^2$ ,      e)  $a^2 + a^2b^2$ ,      f)  $a^4 - b^4$ .

42 Lorsqu'on a du  $x^2$  et du  $x$  dans une expression, on peut reconnaître le début d'une identité remarquable :

$$x^2 + 12x = x^2 + 2 \times x \times 6.$$

Il manque, dans cet exemple,  $6^2$  pour avoir l'identité remarquable complète. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} x^2 + 12x &= x^2 + 2 \times x \times 6 + \underbrace{6^2 - 6^2}_{=0} \\ &= (x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2) - 6^2 \\ &= (x + 6)^2 - 36. \end{aligned}$$

Appliquer ce procédé aux expressions suivantes.

- a)  $x^2 + 2x$ ,      b)  $x^2 - 12x$ ,  
c)  $x^2 + 18x$ ,      d)  $x^2 - 3x$ ,  
e)  $x^2 + 24x$ ,      f)  $x^2 + 9x$ ,  
g)  $4x^2 + 24x$ ,      h)  $x^2 + x$ .

43 On prolonge l'idée de l'exercice précédent aux situations où il y a un petit bout en plus dans l'expression.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1 &= x^2 + 2 \times x \times 2 + \underbrace{2^2 - 2^2}_{=0} + 1 \\ &= (x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2) - 2^2 + 1 \\ &= (x + 2)^2 - 3. \end{aligned}$$

Appliquer ce procédé aux expressions suivantes.

- a)  $x^2 + 2x + 3$ ,      b)  $x^2 + 4x + 5$ ,  
c)  $x^2 - 2x + 2$ ,      d)  $x^2 - 2x - 7$ ,  
e)  $x^2 + 5x + 1$ ,      f)  $x^2 + 3x - 1$ ,  
g)  $4x^2 + 20x + 1$ ,      h)  $x^2 + x + 1$ .

44 Développer et réduire  $(a + b)^3$ . Puis utiliser la formule obtenue pour développer les expressions suivantes :

- a)  $(x + 1)^3$ ,      b)  $(x + 3)^3$ ,      c)  $(x + 5)^3$ ,  
d)  $(2x + 1)^3$ ,      e)  $(2x + 3)^3$ ,      f)  $(2x + 5)^3$ ,  
g)  $(3x + 1)^3$ ,      h)  $(3x + 2)^3$ ,      i)  $(3x + 4)^3$ .

45 Quelle formule obtient-on si l'on remplace  $b$  par  $-b$  dans la formule de l'exercice précédent ? En déduire le développement des expressions suivantes :

- a)  $(x - 1)^3$ ,      b)  $(x - 2)^3$ ,      c)  $(2x - 1)^3$ ,  
d)  $(2x - 3)^3$ ,      e)  $(2x - 5)^3$ ,      f)  $(x - 5)^3$ ,  
g)  $(x - 9)^3$ ,      h)  $(3x - 2)^3$ ,      i)  $(3x - 4)^3$ .

## §5. Un peu de tout

46 Développer et réduire :

- a)  $(x^2 + 2x + 3)(x^2 - x - 1)$ ,  
b)  $(x^2 + 3x - 5)(x^2 - x - 2)$ ,  
c)  $(x^2 + 2x - 5)(2x^2 + x + 1)$ ,  
d)  $(2x^2 + 2x + 5)(x^2 - x + 2)$ ,  
e)  $(x^2 - 2x + 4)(3x^2 + 4x - 2)$ ,  
f)  $(2x^2 - 2x - 7)(2x^2 - 3x - 1)$ ,  
g)  $(x^2 + 4x - 3)(3x^2 - 2x - 1)$ ,  
h)  $(3x^2 + 6x - 2)(x^2 + x - 1)$ .

47 Même consigne :

- a)  $(2x + 3)^2 + (3x + 1)^2$ ,  
b)  $(3x - 1)^2 + (6x - 3)^2$ ,  
c)  $(2x - 4)^2 + (4x + 4)^2$ ,  
d)  $(4x + 5)^2 + (3x - 1)^2$ ,  
e)  $(3x - 1)^2 + (x + 2)^2$ ,  
f)  $(2x + 5)^2 + (3x - 5)^2$ ,  
g)  $(4x - 3)^2 + (3x - 2)^2$ ,  
h)  $(6x - 2)^2 + (5x + 1)^2$ .

48 Même consigne :

- a)  $(x + 1)(x + 2) - (x - 1)(x + 2)$ ,  
b)  $(x + 2)(6x - 2) - (2x + 1)(5x - 2)$ ,  
c)  $(4x - 1)(x + 2) + (x - 1)(2x - 2)$ ,  
d)  $(4x + 4)(5x + 2) - (x + 1)(x - 2)$ ,  
e)  $(2x - 1)(x - 2) - (3x - 1)(3x - 2)$ ,  
f)  $(x + 1)(x + 2) + (x + 1)(x - 2)$ ,  
g)  $(7x - 1)(4x - 2) - (2x - 1)(2x - 2)$ ,  
h)  $(5x + 1)(6x + 2) - (15x - 1)(2x + 3)$ .

49 Même consigne :

- a)  $(x - 1)^3 + (x + 1)^3$ ,  
b)  $(x + 1)^3 - (x - 1)^3$ ,  
c)  $(a + b + c)^2$ ,  
d)  $(a + b + 1)^2 + (a - b - 1)^2$ ,  
e)  $(x^4 + x^2 + 1)^2 - (x^4 + 1)^2$ ,  
f)  $(x + 1)^4 - (x - 1)^4$ ,  
g)  $((x + 2)^2 + (x + 3)^2)^2$ ,  
h)  $((x + 1)^2 + 1)^2 + 1^2$ .