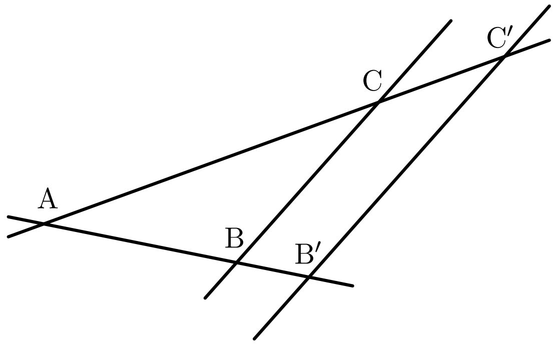
2^nde^ GÉNÉRALE — *Exercices de mathématiques*

NOMBRES & GÉOMÉTRIE (2)

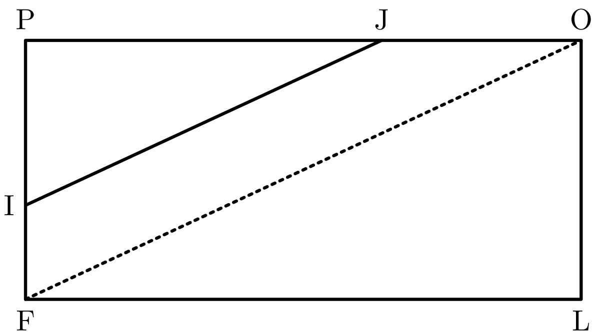
§1. Homothéties

1 Dans la figure ci-dessous, les droites (BC) et (B′C′) sont parallèles. On donne AB = 4 cm, BB′ = 1,5 cm, AC = 7,25 cm et B′C′ = 6 cm.



Calculer BC et CC′.

2 Un rectangle FLOP a pour dimensions FL = 10,5 cm et FP = 4,9 cm. On a placé un point I sur [PF], de sorte que PI = 3,14 cm. Enfin, on place un point J sur [PO] de sorte que (IJ) et (FO) sont parallèles.

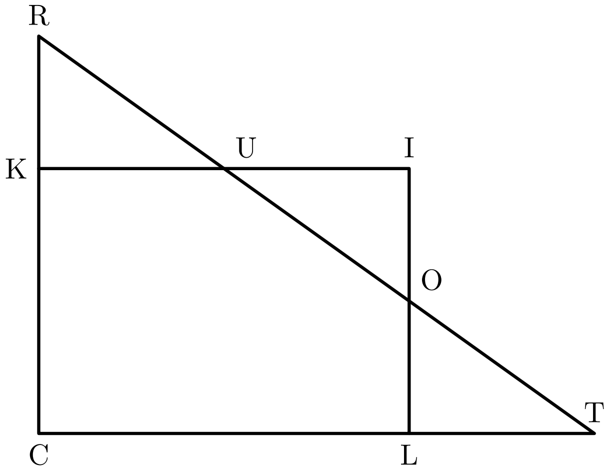


a) Calculer PJ.

b) Calculer FO et IJ.

c) Calculer l'aire du quadrilatère FOJI.

3 On considère un rectangle CLIK de dimensions CL = 7 cm et CK = 5 cm. On note O le milieu de [LI] et U celui de [IK]. La droite (OU) coupe les droites (CL) et (CK) en T et en R, respectivement.



a) Calculer les longueurs RK et RC.

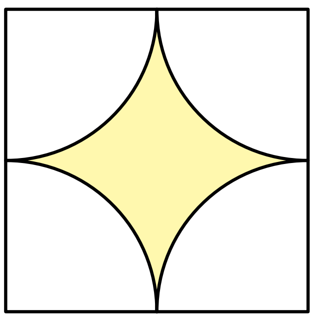
b) En déduire CT.

c) A-t-on TO = OU = UR ? Justifier la réponse.

d) Combien de fois le triangle OUI « rentre-t-il » dans le triangle TRC ?

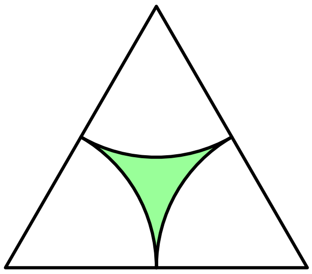
§2. Portions de cercles

4 Dans un carré, de côté 4 cm, on a tracé quatre bouts de cercles, centrés sur les quatre coins.



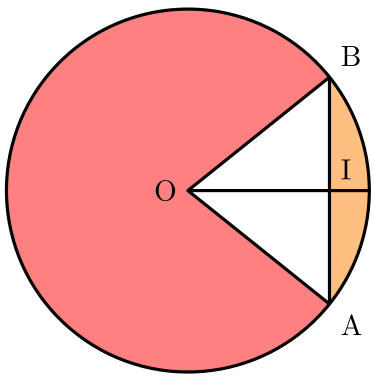
Calculer l'aire de la partie jaune.

5 Même exercice que le précédent, mais cette fois la figure est un triangle équilatéral de côté 4 cm. On a tracé trois bouts de cercles, centrés sur les trois coins.



Calculer l'aire de la partie verte.

6 On considère un cercle de rayon 4 cm. On y a placé deux points A et B, de sorte que AB = 5 cm. Le point I est le milieu de [AB].



a) Justifier que (OI) et (AB) sont perpendiculaires.

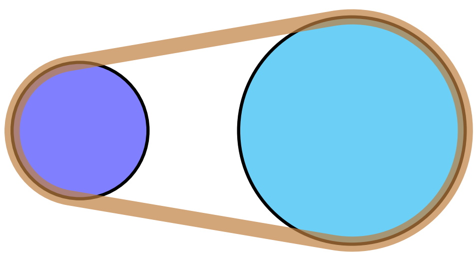
b) Calculer IB, puis OI. En déduire l'aire du BOA.

c) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

d) En déduire l'aire de la portion de disque rouge.

e) Calculer finalement l'aire de la région orange.

7 Une courroie relie deux roues, l'une de rayon 3 cm et l'autre de rayon 5 cm.



Lorsque la petite roue fait dix tours, combien de tours effectue la grande ? Justifier la réponse.

§3. Pourcentages

8 Calculer les valeurs obtenues après les augmentations (ou réductions) suivantes :

a) 100 (+45 %), **b)** 70 (+35 %),
c) 85 (+15 %), **d)** 200 (−5 %),
e) 20 (−30 %), **f)** 110 (−110 %).

9

a) On applique successivement une augmentation de 20 %, puis une diminution de 20 %, à la somme de 100 euros. Quelle valeur obtient-on ?

b) Plus généralement, calculer le taux d'évolution global correspondant à deux évolutions successives, la première du taux t, la deuxième du taux $-t$. On suppose que $t > 0$.

c) Justifier que pour n'importe quel taux strictement positif t, une augmentation du taux t suivie d'une diminution du taux t revient toujours à une diminution globale.

10 Calculer le taux d'évolution global lorsqu'on effectue successivement les évolutions proposées :

a) (+20 %) puis (+25 %),
b) (+10 %) puis (+20 %) puis (+30 %),
c) (+20 %) puis (−25 %),
d) (−20 %) puis (+25 %),
e) (+75 %) puis (+75 %) puis (−50 %),
f) (+8 %) puis (−8 %) puis (+8 %) puis (−8 %).

11

a) Une valeur subit deux augmentations successives de 50 %, puis une diminution de 50 %. La valeur finale est-elle égale, inférieure, ou supérieure à la valeur de départ ? Justifier la réponse.

b) Existe-t-il un taux $t > 0$ tel que deux augmentations successives du taux t, suivies d'une diminution du taux t, redonne *exactement* la valeur de départ ?

§4. Triangles rectangles

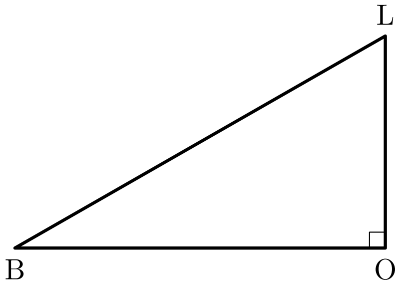
12 Dans un triangle LAC rectangle en C, on donne AC = 5 cm et LA = 7 cm.

a) Construire ce triangle avec les instruments de géométrie. A-t-on besoin d'une équerre ?

b) Calculer LC.

c) Calculer les mesures de tous les angles.

13 On donne un triangle BOL rectangle en O. Le côté [BO] mesure 7,3 cm.



a) Si l'aire de ce triangle est égale à 18,5 cm^2, que vaut OL ?

b) Calculer alors LB.

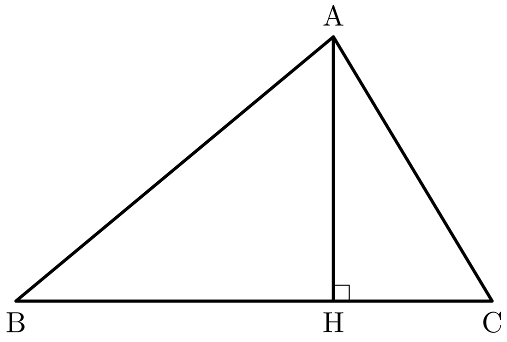
c) Calculer les mesures de tous les angles.

14 Un rectangle ABCD a pour dimensions AB = 9 cm et AD = 5,2 cm.

a) Calculer la longueur de sa diagonale AC.

b) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

15 Dans le triangle ABC ci-dessous, on donne AC = 4,5 cm, BC = 8,1 cm, et mes($\widehat{C}$) = 59°. La hauteur issue de A coupe (BC) en H.



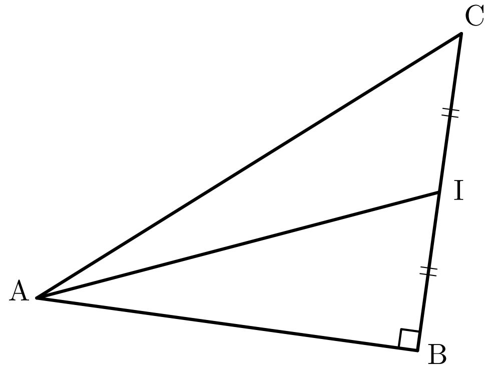
a) Calculer AH.

b) Calculer HC, puis BH.

c) En déduire AB.

d) Calculer les mesures des deux autres angles de ce triangle.

16 On considère un triangle ABC rectangle en B. Le point I est le milieu de [BC], et on donne AB = 6,5 cm et IC = 2,6 cm.

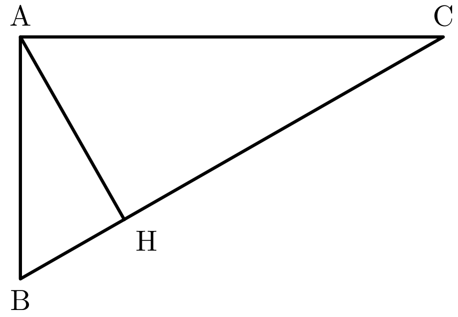


a) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CIA}$.

b) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{IAC}$.

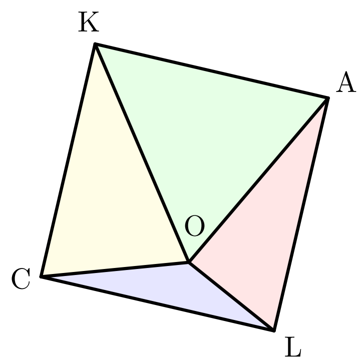
17 Un triangle rectangle a des côtés de longueurs entières, et une hypoténuse qui mesure 50 cm. Déterminer toutes les valeurs possibles des deux côtés. Combien de triangles *non superposables* obtient-on ?

18 On considère un triangle ABC rectangle en A. On donne AB = 4 cm et AC = 7 cm. La hauteur issue de A coupe (BC) en H.



Calculer AH.

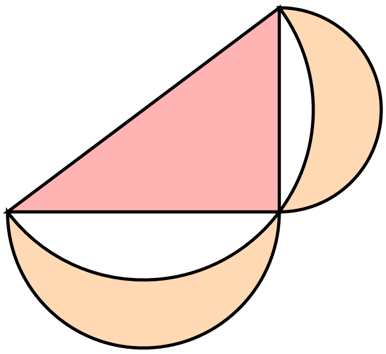
19 Dans carré CLAK, on a placé un point O, de telle sorte que $\mathscr{A}_{\text{COL}} = 1\,\text{cm}^2$, $\mathscr{A}_{\text{LOA}} = 2\,\text{cm}^2$, $\mathscr{A}_{\text{AOK}} = 4\,\text{cm}^2$ et $\mathscr{A}_{\text{KOC}} = 3\,\text{cm}^2$.



a) Que vaut CL ? Justifier la réponse.

b) Calculer les longueurs OC, OL, OA et OK.

20 Autour d'un triangle rectangle, on trace trois demi-cercles, ayant pour centres les milieux des trois côtés.



Démontrer que la somme des aires des deux lunules est égale à l'aire du triangle (c'est le *théorème des deux lunules*).

21 Un triangle *rectangle* possède un côté de 5 cm et un angle de 30°.

a) Dessiner tous les cas possibles.

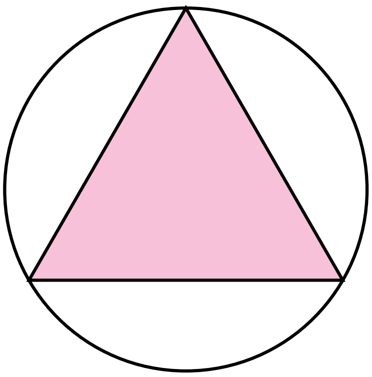
b) Quelle est l'aire du plus grand, parmi tous ces triangles ?

22 Un triangle TIC rectangle en T a une aire de 45 cm^2 et un angle de 37°. Calculer son périmètre.

23 Un triangle TAC rectangle en A a un périmètre de 30 cm et un angle de 41°. Calculer son aire.

24 Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 10 cm et la somme des deux autres côtés vaut 14 cm. Calculer l'aire de ce triangle.

25 Un triangle équilatéral est inscrit dans un cercle de rayon 3 cm. Calculer l'aire de ce triangle.



§5. Nombres irrationnels

26 Soit x un nombre irrationnel. On souhaite démontrer que $2x$ est lui aussi irrationnel, et on fait une démonstration *par l'absurde*.

a) On émet l'hypothèse : $2x$ s'écrit sous la forme d'une fraction a/b, avec a et b entiers. Que peut-on en déduire sur x ?

b) Conclure.

27 Démontrer que $1/\sqrt{2}$ est irrationnel.

28 On veut prouver que $\sqrt{6}$ est irrationnel. On fait une démonstration par l'absurde, en partant de l'hypothèse qu'on peut l'écrire comme une fraction irréductible a/b, et on cherche à aboutir à une contradiction.

a) Montrer que l'hypothèse implique que $a^2 = 6 \times b^2$.

b) En déduire que a est pair.

c) Montrer qu'alors b est pair lui aussi, et conclure.

29 En s'inspirant de l'exercice précédent, démontrer que $\sqrt{30}$ est irrationnel.

30

a) Démontrer que si x et y sont des nombres rationnels, alors $x+y$, $x-y$ et $x \times y$ sont aussi des nombres rationnels.

b) À l'aide d'un exemple, montrer que si x et y sont irrationnels, alors $x+y$ n'est pas forcément irrationnel.

31 Soient x un nombre rationnel et y un nombre irrationnel. Le nombre $x+y$ est-il rationnel ou irrationnel ? Justifier la réponse.

32 On veut démontrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel. On fait une démonstration par l'absurde, en imaginant qu'on peut l'écrire comme une fraction irréductible a/b. Et on cherche à aboutir à une contradiction.

a) Si $\sqrt{2}+\sqrt{3} = a/b$, démontrer que

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 2 \times \sqrt{2}.$$

b) En déduire que $a^4 + b^4 = 10a^2b^2$.

c) Justifier que a et b sont tous les deux impairs.

d) Soit p un nombre premier qui divise a. Montrer qu'il divise aussi b^4.

On admet que ceci implique qu'il divise b, ce qui n'est pas possible car a/b est irréductible. Donc a n'est divisible par aucun nombre premier, ce qui veut dire que $a = 1$.

e) Montrer que $a = 1$ est absurde (ce qui achève la démonstration).