2$^{\text{nde}}$ GÉNÉRALE — *Exercices de mathématiques*

NOMBRES & GÉOMÉTRIE (1)

§1. Multiplications

1 Calculer à la main, en les posant, les multiplications suivantes :
a) 18×23, **b)** 35×40, **c)** 24×25,
d) 91×17, **e)** 19×71, **f)** 73×69.

2 Même consigne :
a) 4206×111, **b)** 2311×88, **c)** 12345×9,
d) 2222×3333, **e)** 2012×6789, **f)** 1111×1111.

3 On souhaite multiplier mentalement un nombre, disons $x = 77$, par 9.
a) Rappeler la règle pour multiplier facilement un nombre par 10.
b) Recopier et compléter le calcul :

$$x \times 9 = x \times (\ldots - \ldots) = 10x - \ldots.$$

c) En déduire la règle : pour multiplier de tête un nombre par 9, on commence par le multiplier par ..., puis on ... le nombre de départ au résultat.
d) Donc $77 \times 9 = 770 - 77 = 693$. S'exercer avec quelques exemples : 35×9, 23×9, 29×9, 81×9.

4 Avant de faire cet exercice, on commencera par ré-écrire la table de multiplication par 9.
a) Quel est le chiffre des dizaines de 7×9 ? Plus généralement, quel est le chiffre des dizaines de $k \times 9$, pour k entre 1 et 10 ?
b) Quel est le chiffre des unités de $k \times 9$, pour k entre 1 et 10 ?
c) Comment trouver, sans calculatrice, le chiffre des unités de $179\,088 \times 9$?

5 Recopier et compléter le calcul :

$$x \times 101 = x \times (\ldots + \ldots) = 100x + \ldots.$$

Puis effectuer mentalement : 45×101, 23×101, 99×101 et 80×101.

6 Écrire la table de multiplication par 11, puis la table de multiplication par 111.

7 On souhaite multiplier mentalement un nombre à deux chiffres par 11.
a) Poser les multiplications 24×11, 36×11, 25×11.
b) Dans chaque cas, quel est le chiffre des centaines du résultat ? Et le chiffre des unités ? Et celui « du milieu » ?
c) Calculer mentalement 18×11 et 54×11.
d) Que se passe-t-il dans le cas de 39×11 ?

§2. Table de Pythagore

$\times$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

8 Combien y a-t-il de cases dans cette table ? Parmi ces cases, combien sont nulles ? Où se trouve la plus grande valeur, et pourquoi ?

9 On considère la ligne i de la table de Pythagore. Par exemple, pour $i = 5$, il s'agit de 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, etc.. Comment passe-t-on, sur cette ligne, d'un nombre au suivant ? On commencera par répondre dans le cas $i = 5$, puis ensuite on cherchera une méthode valable pour un i quelconque.

10 Quel est le nombre, hormis zéro, qui apparaît le plus souvent dans la table ? Il y a peut-être plusieurs possibilités.

11 On prolonge la table de Pythagore à l'infini : c'est-à-dire qu'on ajoute les lignes et les colonnes pour les multiples de 11, de 12, de 13, etc..

a) Combien de fois apparaît, en tout, le nombre 12 ?

b) Même question pour le nombre 100.

c) Le programme ci-dessous calcule le nombre de diviseurs de x. On en verra une version plus efficace plus loin.

```
def NombreDivisieurs(x) :
    nb = 0
    for d in range(1, x + 1) :
        if x % d == 0 :
            nb += 1
    return nb
```

Quel lien y a-t-il entre le nombre de diviseurs de x et le nombre de cases où se trouve x dans la table de Pythagore « infinie » ?

d) Recopier et compléter le programme ci-dessous, qui détermine le plus petit nombre x (strictement positif) apparaissant au moins n fois dans la table de Pythagore infinie.

```
def PlusPetitNombre(n) :
    x = 1
    while ... < n :
        x += 1
    return ...
```

e) Quel est le plus petit nombre apparaissant cent fois ?

12 La *diagonale* de la table de Pythagore est l'ensemble des cases peintes en jaune ci-dessus.

a) Comment s'appellent les nombres qui se trouvent sur cette diagonale ?

b) Si l'on fait les soustractions de deux cases consécutives sur cette diagonale (par exemple $1 - 0$, puis $4 - 1$, puis $9 - 4$, etc.), quelle suite de nombres voit-on apparaître ?

13 On considère un petit bloc de quatre cases adjacentes dans la table de Pythagore, par exemple

30	36
35	42

et on voit qu'il y a trois nombres pairs, et un nombre impair. C'est le cas quel que soit le bloc qu'on a choisi : expliquer pourquoi.

14 On reprend un petit bloc de quatre cases adjacentes, comme dans l'exercice précédent.

a) Trouver un bloc qui ne contient aucun multiple de 3, comme par exemple

28	35
32	40

(il faut évidemment en trouver un autre que celui-ci !). Combien y a-t-il de solutions en tout ?

b) Trouver un bloc qui contient exactement deux multiples de 3, comme par exemple

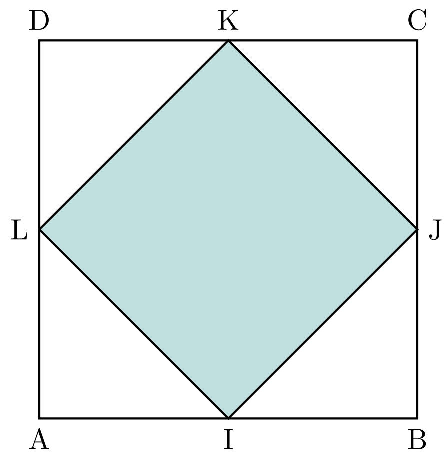
12	16
15	20

car 12 et 15 sont des multiples de 3, mais pas 16 et 20 (on en proposera évidemment un autre), puis un bloc qui en contient exactement trois.

c) Peut-on trouver un bloc qui contient quatre multiples de 3 ? Ou bien exactement un multiple de 3 ? Justifier la réponse.

§3. Triangles et quadrilatères

15 Voici un carré ABCD de côté 5 cm. On a placé le milieu I de [AB], le milieu J de [BC], le milieu K de [CD] et le milieu L de [DA].



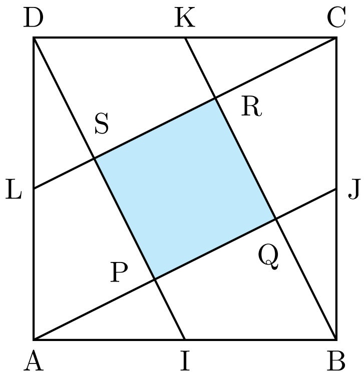
a) Justifier que IJKL est un carré.

b) Calculer l'aire du carré IJKL.

On suppose maintenant que ABCD est un rectangle de dimensions AB = 7 cm et AD = 5 cm, et on place les quatre mêmes milieux I, J, K, L.

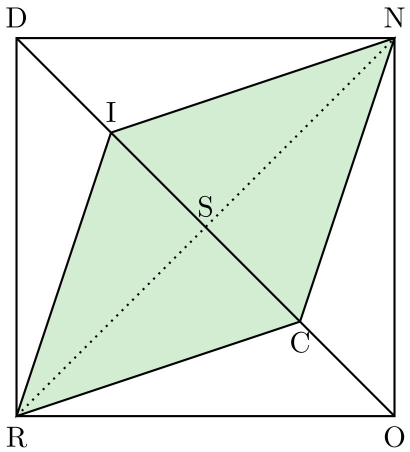
c) Faire une figure. Que peut-on dire du quadrilatère IJKL ?
d) Calculer son aire.

16 Un carré ABCD a pour côté 4 cm. On a placé les points I, J, K et L, milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. En traçant les segments [AJ], [BK], [CL] et [DI], on fait apparaître un quadrilatère PQRS.



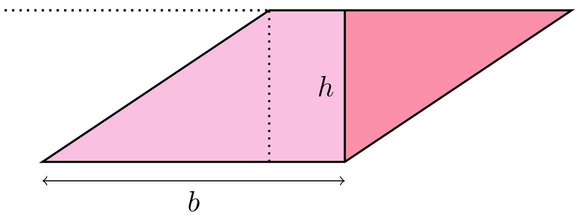
Calculer l'aire de ce quadrilatère PQRS.

17 On a dessiné un carré NORD de côté 5 cm. On a partagé la diagonale OD en quatre segments superposables : DI = IS = SC = CO.



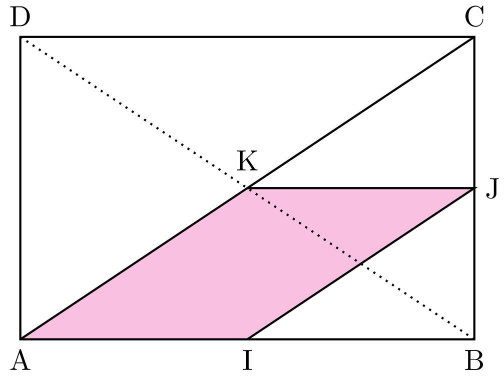
a) Justifier que CRIN est un losange.
b) Calculer son aire.

18 On a tracé ci-dessous un parallélogramme, en faisant apparaître quelques traits.



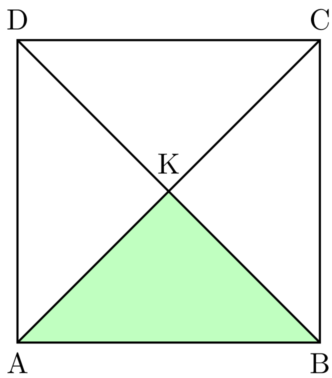
Trouver, en fonction de b et h, une formule qui donne l'aire de ce parallélogramme. On justifiera cette formule par des découpages et recollements.

19 On donne un rectangle ABCD, de côtés AB = 6 cm et BC = 4 cm. Ses diagonales se coupent en K, le point I est le milieu de [AB] et J celui de [BC].



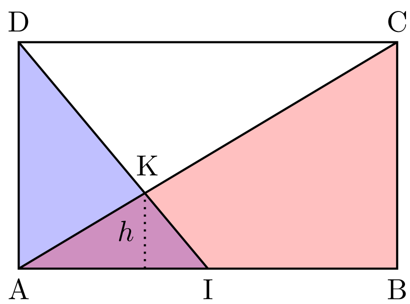
a) Que vaut l'aire du rectangle ABCD ?
b) En déduire l'aire du parallélogramme AIJK.

20 On a tracé les deux diagonales d'un carré ABCD, de côté AB = 4 cm. Elles se coupent en K.



a) Que vaut l'aire du carré ABCD ? Et celle du triangle ABK ?
b) En déduire la longueur AK.

21 Voici un rectangle ABCD avec AB = 5 cm et BC = 3 cm. Le point I est le milieu de [AB], et on note K l'intersection de (AC) et (DI).



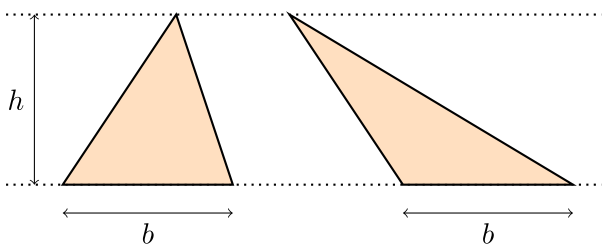
a) Quelle est l'aire du rectangle ABCD ?
b) Calculer les aires des triangles ABC et AID.

c) On note h la hauteur du triangle AIK perpendiculaire à la base [AI]. Exprimer en fonction de h l'aire du triangle AIK.
d) Exprimer, en fonction de h, la hauteur de DKC perpendiculaire à [DC], puis l'aire de ce triangle.
e) Justifier, par découpages et recollements, qu'on a

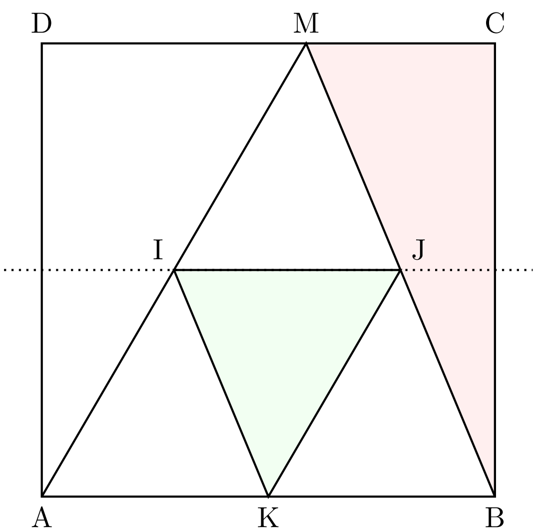
$$3{,}75 + 7{,}5 - \frac{2{,}5 \times h}{2} + \frac{5 \times (3-h)}{2} = 15.$$

f) En déduire la valeur de h.
g) Calculer finalement l'aire du triangle AIK.

22 Avec des découpages et recollements, et sans utiliser la formule des parallélogrammes, proposer une démonstration de la formule qui donne l'aire d'un triangle. On distinguera les deux cas ci-dessous (ce qui veut dire qu'il faut donner *deux* démonstrations : une pour chaque cas).

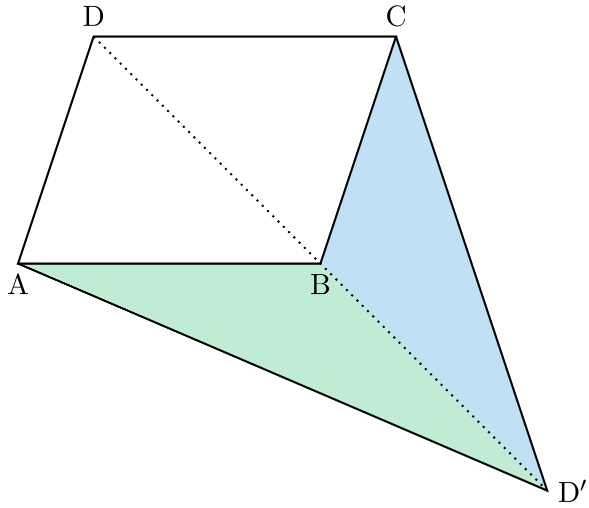


23 Ci-dessous gît un carré ABCD de côté 6 cm. Le point M est situé quelque part sur le segment [CD], et les points I et J sont les milieux respectifs de [AM] et [BM]. Enfin, le point K est le milieu de [AB].



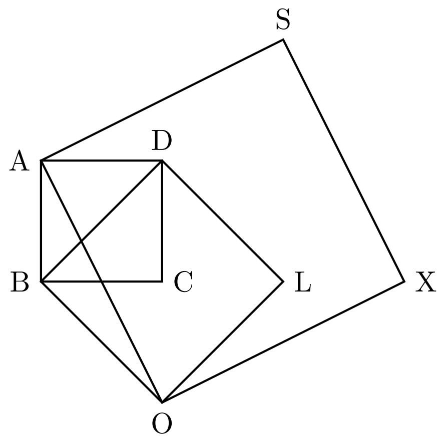
a) Que vaut l'aire du carré ABCD ? Et celle du triangle ABM ?
b) Justifier que les quatre triangles AKI, KBJ, IJM et JIK sont superposables. En déduire leur aire (ils ont donc tous la même).
c) On note x la longueur DM. Exprimer l'aire de BCM en fonction de x.
d) Quelle doit être la position de M pour que JIK et BCM aient la même aire ?
e) Que vaut alors l'aire de AMD ?

24 On considère un parallélogramme ABCD. Le point D′ est le symétrique de D par rapport à B.



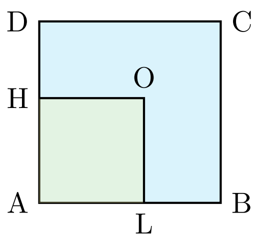
Démontrer que les triangles BAD′ et BCD′ ont la même aire.

25 Dans la figure ci-dessous, ABCD est un carré, tout comme BOLD et SAXO.



Montrer que les points B, C, L et X sont alignés.

26 Ci-dessous, l'aire du carré HALO est égale au tiers de l'aire du carré ABCD.



Calculer le rapport AL/AB.

§4. Divisions, fractions

27 Poser les divisions euclidiennes suivantes.

a) $204 \div 5$, **b)** $150 \div 4$, **c)** $2307 \div 5$,
d) $905 \div 6$, **e)** $660 \div 7$, **f)** $1581 \div 8$.

28 Même consigne.

a) $250 \div 12$, **b)** $1500 \div 13$, **c)** $142 \div 25$,
d) $900 \div 17$, **e)** $432 \div 89$, **f)** $700 \div 11$.

29 Mettre les fractions suivantes sous forme irréductible :

a) $\frac{25}{15}$, **b)** $\frac{30}{36}$, **c)** $\frac{45}{81}$, **d)** $\frac{250}{525}$,
e) $\frac{75}{120}$, **f)** $\frac{124}{56}$, **g)** $\frac{128}{192}$, **h)** $\frac{252}{120}$.

30 Même consigne :

a) $\frac{255}{105}$, **b)** $\frac{121}{143}$, **c)** $\frac{1001}{221}$, **d)** $\frac{726}{1001}$,
e) $\frac{1200}{1515}$, **f)** $\frac{2500}{3125}$, **g)** $\frac{111}{123}$, **h)** $\frac{207}{126}$.

31 Même consigne :

a) $\frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}$, **b)** $\frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{3 \times 4 \times 5 \times 6}$,
c) $\frac{10 \times 55}{25 \times 121}$, **d)** $\frac{77 \times 33}{44 \times 49}$.

32 Trouver (sans calculatrice) la valeur décimale des fractions suivantes :

a) $3/4$, **b)** $2/3$, **c)** $5/4$, **d)** $4/3$,
e) $9/10$, **f)** $1/3$, **g)** $1/9$, **h)** $10/9$.

33 Même exercice :

a) $7/4$, **b)** $9/4$, **c)** $4/5$, **d)** $6/5$,
e) $1/3$, **f)** $25/3$, **g)** $100/12$, **h)** $1/12$.

34 On considère le nombre

$$x = 0{,}999\,999\,999\ldots$$

a) Que vaut $10x - 9$?

b) Résoudre l'équation $10x - 9 = x$.

c) En déduire (sans utiliser la calculatrice, évidemment) la valeur décimale de $1/9$.

d) Puis la valeur décimale de $1/99$, et enfin celle de $1/11$.

35 Soit $x = 2{,}499\,999\,999\ldots$.

a) Que vaut $10x - 25$?

b) Démontrer que $x = 2{,}5$.

36 En s'inspirant des deux exercices précédents, trouver une fraction égale à

$$0{,}340\,534\,053\,405\,340\,534\,053\,405\ldots$$

37

a) À l'aide d'une calculatrice, calculer $1/7$, $2/7$, $3/7$, $4/7$, $5/7$ et $6/7$.

b) Que remarque-t-on ?

c) Que vaut $100 \times 0{,}142\,857\,142\,857\ldots - 14$?

d) Faire le lien avec la division euclidienne $100 = 14 \times 7 + 2$.

38 Effectuer, à l'aide de la calculatrice, les divisions euclidiennes suivantes :

a) $1000 = 13 \times \ldots + \ldots$, **b)** $2000 = 45 \times \ldots + \ldots$,
c) $3001 = 42 \times \ldots + \ldots$, **d)** $4500 = 51 \times \ldots + \ldots$.

39 Appliquer l'algorithme d'Euclide à 1001 et 221 (on s'aidera de la calculatrice). Que vaut leur PGCD ? Et leur PPCM ?

40 Même consigne avec 10000 et 375.

41 Quels sont les entiers naturels n pour lesquels la fraction

$$\frac{n}{n+1}$$

est irréductible ?

42 Quels sont les entiers naturels n pour lesquels la fraction

$$\frac{n^2+1}{n^2+n+1}$$

est irréductible ?

43 Démontrer que pour tout entier naturel impair n la fraction

$$\frac{n^2+1}{n^3+1}$$

est irréductible.

§5. Multiples, diviseurs

44 Soit x un entier strictement positif. Démontrer que si x n'est pas premier, alors il possède un diviseur compris entre 2 et $\sqrt{x}$.

45 Trouver tous les diviseurs de 100, puis ceux de 1000.

46 Trouver tous les diviseurs de 10^6. Indice : il y en a 49.

47

a) Trouver cinq nombres qui ont un nombre impair de diviseurs (on trouvera deux exemples dans les exercices précédents).

b) Émettre une conjecture puis la démontrer.

48

a) Combien de diviseurs possède le nombre 10^9 ?

b) Quel est le plus petit nombre strictement positif qui possède au moins 100 diviseurs ?

49

a) Quels sont les dix plus petits entiers qui ont *exactement* 2 diviseurs ?

b) Et les dix plus petits entiers qui en ont *exactement* 3 ?

50 Parmi les multiples de 7 (strictement positifs et) inférieurs à 100, lequel a le plus de diviseurs ?

51 Démontrer que le carré d'un nombre pair est toujours un multiple de 4.

52 Démontrer que si x est le carré d'un entier, alors $x + 1$ n'est jamais divisible par 3.

53 On considère un nombre entier x à six chiffres, qu'on écrit

$$x = \overline{abc\,def}$$

avec a, b, c, d, e et f les chiffres (donc entre 0 et 9).

a) Justifier que $x = 10^5a+10^4b+10^3c+10^2d+10e+f$.

b) Si n est un entier, que vaut $10^n - 1$?

c) Montrer que $x - (a + b + c + d + e + f)$ est un multiple de 9.

d) Démontrer le critère de divisibilité par 9 : x est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres (donc $a + b + c + d + e + f$) est un multiple de 9.

54 En utilisant l'exercice précédent, démontrer le critère de divisibilité par 3 : un nombre x est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

55 Trouver le PPCM de 24 et 36. Puis le PPCM de 91 et 117.

56 On dit qu'un nombre est *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs (excepté lui-même). Le plus petit nombre parfait est 6 : on a

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

Trouver le deuxième plus petit nombre parfait.

57 Sans calculatrice : si l'on écrit

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{10}$$

sous la forme d'une fraction irréductible, quel est le dénominateur de cette fraction ?

§6. Nombres premiers

58 Trouver tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 100.

59 Soient p et q deux nombres premiers distincts. Trouver tous les diviseurs de $p \times q$.

60

a) Trouver les huit diviseurs de 30. Puis ceux de 42.

b) Soient p, q et r trois nombres premiers distincts. Déterminer l'ensemble de diviseurs de $p \times q \times r$. (Indice : on cherchera le lien avec la question précédente).

c) Trouver les dix plus petits entiers naturels qui ont exactement 8 diviseurs.

61 Soit n un entier strictement positif. Est-on sûr qu'il existe un entier possédant exactement n diviseurs ? Justifier la réponse.

62

a) Quel est le seul nombre premier qui se termine par le chiffre 5 ? Pourquoi n'y en a-t-il pas d'autre ?

b) On cherche des « dizaines » qui ont quatre nombres premiers impairs (et qui donc se terminent par 1, 3, 7 et 9). Le premier exemple est la dizaine de 10 : elle contient les nombres premiers 11, 13, 17 et 19. Trouver deux autres telles dizaines.

c) Écrire un programme qui trouve dix telles dizaines.

63 Écrire un programme qui détermine, parmi les nombres premiers inférieurs à 10 000, combien se terminent par 1, par 3, par 7 et par 9. L'un de ces quatre chiffres apparaît-il plus souvent que les autres ?

```
>>> ApparitionDernierChiffre(10000)
Se terminant par 1 : 306
Se terminant par 3 : 310
Se terminant par 7 : 308
Se terminant par 9 : 303
```