DEVOIR SURVEILLÉ N°1

26 septembre 2023, 55 minutes

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Ils ne sont pas nécessairement rangés par ordre de difficulté. Les durées sont indicatives.

Les calculatrices, bouliers-compteurs et tous autres appareils de calcul sont interdits.

Exercice I — Tableau de proportionnalité (8 minutes)

Trouver les valeurs manquantes dans le tableau de proportionnalité ci-dessous. Pour chacune d'elles, on indiquera sur la copie le calcul qui a été fait.

On n'est pas obligé de faire les calculs dans l'ordre proposé.

2,5	3	5	**a)**	8
b)	4,5	**c)**	3	**d)**

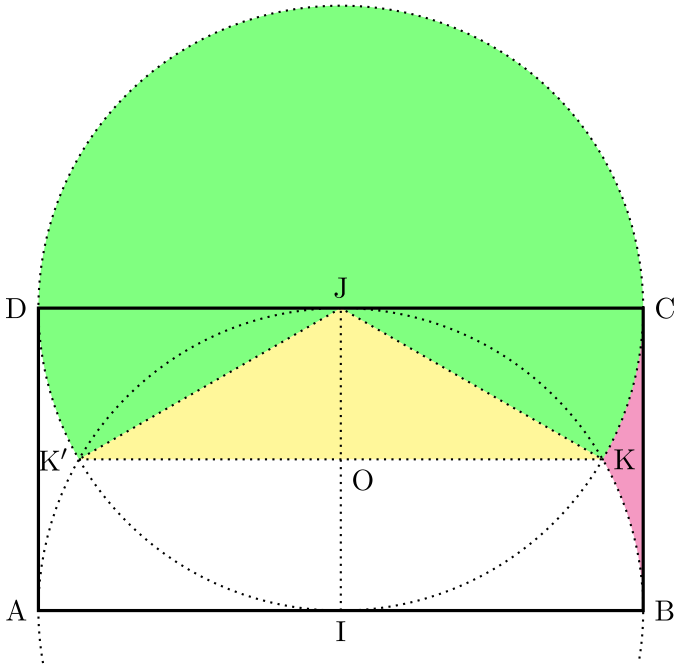
Exercice II — Fractions (12 minutes)

Simplifier au maximum les fractions suivantes :

1) $\dfrac{12}{60}$, **2)** $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$, **3)** $\dfrac{1\times 2\times 3\times 4\times 5}{8\times 9\times 10\times 11\times 12}$, **4)** $\dfrac{10^5\times 2^7}{5^6\times 4^8}$.

Exercice III — Un calcul d'aire (35 minutes)

Un rectangle ABCD a pour dimensions AB = 8 cm et AD = 4 cm. Le point I est le milieu de [AB], le point J est le milieu de [DC], et on a tracé les cercles de diamètres [AB] et [DC]. Ces deux cercles se rencontrent en deux points ; on les note K et K′ comme sur la figure. Les droites (KK′) et (IJ) se coupent en un point O, qui, vu toutes les symétries de la figure, est aussi le centre du rectangle ABCD.



1) Que vaut JC ?

2) On note $\mathscr{C}$ le disque de centre J et de rayon [JC]. Calculer son aire.

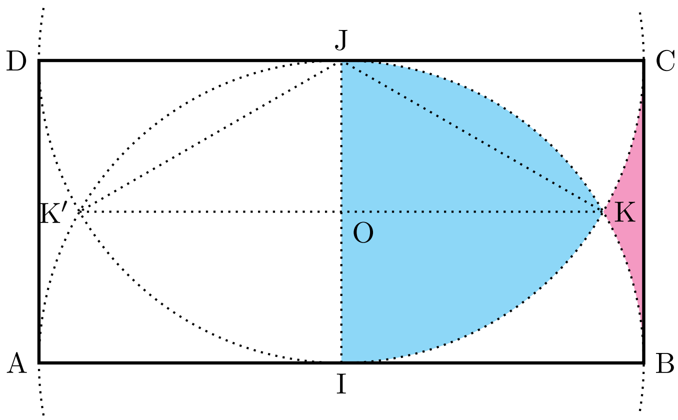
3) Justifier que l'angle $\widehat{\mathrm{IJK}}$ mesure 60°.

4) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{KJK'}}$ puis l'aire de la portion de disque verte.

Avec le théorème de Pythagore (que nous verrons bientôt en classe) on peut calculer $\mathrm{OK} = 2\sqrt{3} \simeq 3{,}464\,\mathrm{cm}$. On pourra utiliser cette valeur dans les questions qui suivent.

5) Calculer l'aire du triangle KJK′ (c'est la partie jaune sur la figure précédente).

6) Avec des découpages et recollements, en déduire l'aire de la partie bleue ci-dessous, délimitée par le segment [IJ] et les arcs de cercles $\widehat{\mathrm{IK}}$ et $\widehat{\mathrm{KJ}}$. On fera un petit schéma pour expliquer le découpage utilisé.



7) Calculer finalement l'aire de la partie rose, délimitée par le segment [BC] et les arcs de cercles $\widehat{\mathrm{BK}}$ et $\widehat{\mathrm{KC}}$.

Et comme dans cet exercice il y a des racines carrées et des multiplications par π, et que sans calculatrice ça n'est pas facile, voici les réponses. Elles sont dans le désordre, et mélangées avec deux valeurs qu'on ne demande pas de calculer dans l'exercice, mais qui peuvent peut-être servir :

$$9{,}827\,\mathrm{cm}^2, \quad 16{,}000\,\mathrm{cm}^2, \quad 12{,}566\,\mathrm{cm}^2, \quad 0{,}695\,\mathrm{cm}^2, \quad 50{,}265\,\mathrm{cm}^2, \quad 6{,}928\,\mathrm{cm}^2, \quad 33{,}510\,\mathrm{cm}^2.$$

Exercice I — Tableau de proportionnalité

On va proposer deux méthodes. Dans la première, on commence par calculer, par un produit en croix :

$$\mathbf{a} = \frac{3 \times 3}{4{,}5} = 2.$$

Ensuite, on voit que **c** correspond à $5 = 3 + 2$ sur la première ligne, donc $\mathbf{c} = 4{,}5 + 3 = 7{,}5$, que **d** correspond à $8 = 3 + 5$ sur la première ligne, donc $\mathbf{d} = 4{,}5 + 7{,}5 = 12$, et enfin que **b** correspond à la moitié de 5 sur la première ligne, donc $\mathbf{b} = 7{,}5 \div 2 = 3{,}75$.

Deuxième méthode : on identifie le coefficient de proportionnalité. C'est

$$\frac{4{,}5}{3} = \frac{3 \times 1{,}5}{2 \times 1,5} = \frac{3}{2}.$$

Multiplier un nombre par 3/2 revient à lui ajouter sa moitié :

$$\frac{3}{2} \times x = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times x = x + \frac{x}{2}.$$

Par exemple, $3/2 \times 10 = 10 + 5 = 15$. Donc $\mathbf{b} = 3/2 \times 2{,}5 = 2{,}5 + 1{,}25 = 3{,}75$, puis $\mathbf{c} = 3/2 \times 5 = 5 + 2{,}5 = 7{,}5$ et $\mathbf{d} = 3/2 \times 8 = 8 + 4 = 12$. Pour le **a** il faut diviser par 3/2, c'est-à-dire multiplier par 2/3. Ici c'est facile : $\mathbf{a} = 3 \div (3/2) = 3 \times 2/3 = 2$.

Exercice II — Fractions

1) $\dfrac{12}{60} = \dfrac{12 \times 1}{12 \times 5} = \dfrac{1}{5}$.

2) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{2 \times 3}{\sqrt{3}} = \dfrac{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

3) Alors ici, évidemment, on ne calcule pas le numérateur et le dénominateur, on commence par simplifier ce qu'on peut :

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12} = \frac{1 \times (2 \times 5) \times (3 \times 4)}{8 \times 9 \times (2 \times 5) \times 11 \times (3 \times 4)} = \frac{1}{8 \times 9 \times 11}.$$

Pour finir le calcul, si on sait multiplier par 11, on peut faire directement $8 \times 9 \times 11 = 72 \times 11 = 792$. Si on ne sait pas multiplier par 11 (on verra la méthode plus tard en calcul mental), on peut faire $8 \times (9 \times 11) = 8 \times 99 = 8 \times (100 - 1) = 800 - 8 = 792$.

4) $\dfrac{10^5 \times 2^7}{5^6 \times 4^8} = \dfrac{(2 \times 5)^5 \times 2^7}{5^6 \times (2^2)^8} = \dfrac{2^5 \times 5^5 \times 2^7}{5^6 \times 2^{2 \times 8}} = \dfrac{2^{12} \times 5^5}{5^6 \times 2^{16}} = \dfrac{1}{5 \times 2^4} = \dfrac{1}{(5 \times 2) \times 2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{80}$.

Exercice III — Un calcul d'aire

1) Puisque J est le milieu de [DC], on a $\mathrm{JC} = 1/2 \times 8\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{cm}$. De la même manière $\mathrm{DJ} = \mathrm{AI} = \mathrm{IB} = 4\,\mathrm{cm}$ (on aura besoin de ces longueurs tout au long de l'exercice).

2) Le rayon du disque est $\mathrm{R} = 4\,\mathrm{cm}$, donc son aire vaut

$$\mathscr{A}_{\mathscr{C}} = \pi \times \mathrm{R}^2 \simeq 3{,}1416 \times (4\,\mathrm{cm})^2 \simeq 50{,}265\,\mathrm{cm}^2.$$

3) On va montrer que IJK est un triangle équilatéral : chacun de ses angles (en particulier l'angle $\widehat{\mathrm{IJK}}$) mesure donc 60°.

Puisque K est sur le cercle de centre J, le segment [JK] est un rayon de ce cercle : il mesure donc 4 cm. De même K est sur le cercle de centre I, donc IK = 4 cm.

Reste à vérifier que le segment [IJ] mesure lui-aussi 4 cm, ça paraît évident sur la figure, mais c'est un peu plus compliqué à démontrer rigoureusement. Le triangle AJD est isocèle rectangle en J, donc $\widehat{\text{JAD}}$ mesure 45°. Puisque $\widehat{\text{IAD}}$ mesure 90°, l'angle $\widehat{\text{IAJ}}$ mesure $90° - 45° = 45°$. On en déduit que les triangles AJI et AJD sont superposables (ils ont un angle et deux côtés égaux deux-à-deux). Ainsi IJ = AD = 4 cm.

On obtient par la même occasion d'autres informations (qui elles aussi paraissent évidente sur la figure) : $\widehat{\text{AIJ}}$ est un angle droit, I est sur le cercle de diamètre [DC], et par symétrie J est sur le cercle de diamètre [AB], etc..

4) Par symétrie, l'angle $\widehat{\text{K}'\text{JI}}$ mesure lui-aussi 60°. Et donc l'angle $\widehat{\text{K}'\text{JK}}$ mesure $60° + 60° = 120°$. L'angle « rentrant » (c'est comme ça que ça s'appelle) $\underset{\smile}{\text{K}'\text{JK}}$ mesure donc $360° - 120° = 240°$.

Par proportionnalité, l'aire de la portion de disque verte est donc

$$\mathscr{A}_{\text{verte}} = \frac{240°}{360°} \times \mathscr{A}_{\mathscr{C}} \simeq \frac{2}{3} \times 50{,}265\,\text{cm}^2 \simeq 33{,}510\,\text{cm}^2,$$

puisque 240/360 se simplifie en 2/3 (en divisant par 120 « en haut et en bas »).

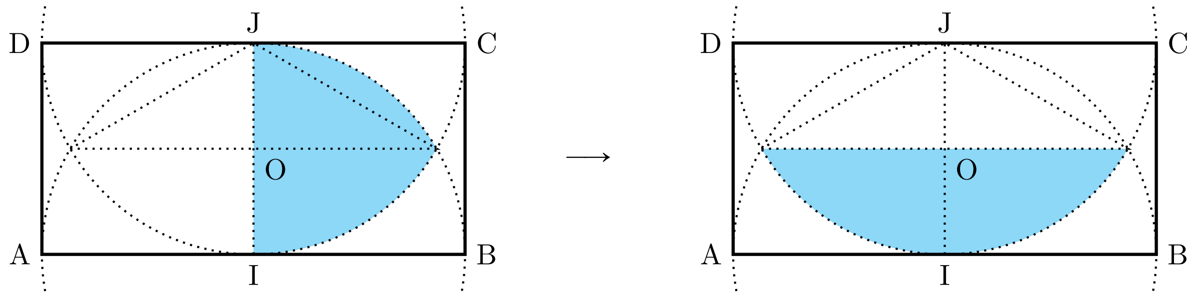
5) On a

$$\mathscr{A}_{\text{KJK}'} = \frac{1}{2} \times b \times h = \frac{1}{2} \times \text{OJ} \times \text{KK}'.$$

Or O est le centre de ABCD, donc OJ vaut la moitié de IJ, c'est-à-dire 2 cm. D'autre part, (IJ) est la médiatrice de [KK′], donc O est le milieu de [KK′]. Ainsi KK′ vaut le double de OK et finalement

$$\mathscr{A}_{\text{KJK}'} \simeq \frac{1}{2} \times 2\,\text{cm} \times (2 \times 3{,}464\,\text{cm}) \simeq 2 \times 3{,}464\,\text{cm}^2 \simeq 6{,}928\,\text{cm}^2.$$

6) Si on coupe la moitié supérieure de la région bleue, et qu'on la fait tourner d'un demi-tour autour de O, on obtient cette nouvelle figure, qui a donc la même aire.



Or, en ajoutant à cette nouvelle région le triangle jaune et la portion de disque verte, on obtient *la totalité* de ce disque. On en déduit que

$$\mathscr{A}_{\text{bleue}} = \mathscr{A}_{\mathscr{C}} - \mathscr{A}_{\text{verte}} - \mathscr{A}_{\text{KJK}'} \simeq 50{,}265\,\text{cm}^2 - 33{,}510\,\text{cm}^2 - 6{,}928\,\text{cm}^2 \simeq 9{,}827\,\text{cm}^2.$$

7) Le carré IBCJ a une aire de $(4\,\text{cm})^2 = 16\,\text{cm}^2$. Dans ce carré on voit deux quarts de disques : l'un de centre J et d'arc $\overset{\frown}{\text{IC}}$, l'autre de centre I et d'arc $\overset{\frown}{\text{BJ}}$. Ces deux quarts de disques ont la même aire, égale à

$$\mathscr{A}_{1/4} = \frac{1}{4} \times \mathscr{A}_{\mathscr{C}} \simeq \frac{1}{4} \times 50{,}265\,\text{cm}^2 \simeq 12{,}566\,\text{cm}^2.$$

Pour former le carré, il faut ajouter les aires de ces deux quarts de disques, et celle de la région rose. Mais en faisant ainsi, on compte « en double » la région bleue. Finalement :

$$\mathscr{A}_{\text{IBCJ}} = (\mathscr{A}_{1/4} + \mathscr{A}_{1/4} - \mathscr{A}_{\text{bleue}}) + \mathscr{A}_{\text{rose}},$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{A}_{\text{rose}} = \mathscr{A}_{\text{IBCJ}} - \mathscr{A}_{1/4} - \mathscr{A}_{1/4} + \mathscr{A}_{\text{bleue}} \simeq 16\,\text{cm}^2 - 12{,}566\,\text{cm}^2 - 12{,}566\,\text{cm}^2 + 9{,}827\,\text{cm}^2 \simeq 0{,}695\,\text{cm}^2.$$