LEÇON 15 : ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

① Rappel : ce qu'est une équation

Une équation est un problème avec une inconnue et deux quantités : le membre de gauche et le membre de droite. Il s'agit de trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui rendent les deux membres égaux.

l'inconnue

l'inconnue (encore elle !)

$$\underbrace{x^2+3}_{\text{le membre de gauche}} = \underbrace{2x+11}_{\text{le membre de droite}}$$

Le plus souvent l'inconnue s'appelle x.

RÈGLE : pour savoir si un nombre est solution de l'équation, on évalue chaque membre en ce nombre (on remplace l'inconnue par le nombre) et on regarde s'il y a égalité.

Exemple : $x = 4$ est solution car $\underbrace{4^2+3}_{=19} = \underbrace{2\times 4+11}_{=19}$

$x = 1$ n'est pas solution car $\underbrace{1^2+3}_{=4} \neq \underbrace{2\times 1+11}_{=13}$

$x = -2$ est solution car $\underbrace{(-2)^2+3}_{=7} = \underbrace{2\times(-2)+11}_{=7}$.

② Méthode de résolution

C'est très facile, il n'y a que deux règles.

RÈGLES : i) on peut ajouter (ou soustraire) une même quantité aux deux membres d'une équation ;

ii) on peut multiplier (ou diviser) les deux membres d'une équation par une même quantité non nulle.

« on peut » signifie que cela ne change pas l'ensemble des solutions de l'équation.

Exemples : a) $3x + 4 = 5x + 1$

$\Leftrightarrow \quad 3 = 2x$ (−3x) (−1)

«a les mêmes solutions que»

$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} = x$ (÷2)

L'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

L'idée est de regrouper dans un membre tout ce qui contient l'inconnue, et dans l'autre tout ce qui n'en contient pas.

b) $2x + 7 = 3x - 5$

$\Leftrightarrow \quad -x = -12$ (−3x) (−7)

$\Leftrightarrow \quad x = 12$ (÷(−1))

L'ensemble des solutions est $\{12\}$.

③ Deux cas particuliers

L'équation toujours vraie : $0 = 0$ (tous les nombres sont solutions)
et l'équation toujours fausse : $0 = 1$ (il n'y a pas de solution).

Exemples : a) $2x + 7 = 2(x + 3)$

$\Leftrightarrow \quad 2x + 7 = 2x + 6$

$\Leftrightarrow \quad 7 = 6$ (−2x)

Il n'y a pas de solution.

b) $2(3x+5) = 6x + 10$

$\Leftrightarrow \quad 6x + 10 = 6x + 10$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$ (−6x) (−10)

L'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

④ Valeurs interdites

Il y a du «x» au dénominateur, et on n'a pas le droit de diviser par 0 : il faut chercher les valeurs interdites.

Ex : $\frac{3x+4}{2x-1} = 2$

L'équation a du sens lorsque $2x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x \neq 1$

$\Leftrightarrow \quad x \neq 1/2$.

Sous la réserve $x \neq 1/2$ on a $\frac{3x+4}{2x-1} = 2 \Leftrightarrow 3x + 4 = 4x - 2$ (×(2x−1)) ← on a le droit de multiplier par $2x-1$ car il est non nul.

$\Leftrightarrow \quad 6 = x$. (−3x) (+2)

On vérifie que la solution trouvée n'est pas interdite !

Puisque 6 n'est pas une valeur interdite, l'ensemble des solutions est $\{6\}$.