Leçon 11 : Nombres irrationnels

① Nombres pairs et impairs

Définition : les multiples de 2 s'appellent les nombres <u>pairs</u>. Les autres s'appellent les nombres <u>impairs</u>.

Remarque : par définition, un nombre pair est de la forme $2\times k$, avec $k\in\mathbb{Z}$. Et les nombres impairs sont de la forme $2\times k+1$.
← l'ensemble des entiers relatifs

Propriétés : un nombre et son carré ont toujours la même parité.

Démonstration : si x est pair, il est de la forme $x=2\times k$ pour un $k\in\mathbb{Z}$. On a donc $x^2=(2\times k)^2=2^2\times k^2=4\times k^2$ qui est pair.
Si x est impair, il est de la forme $x=2\times k+1$ donc
$$x^2=\underbrace{(2k+1)^2=4k^2+4k+1}_{1^{ere}\text{ identité remarquable}}=2(2k^2+2k)+1$$ qui est impair. <u>C.Q.F.D.</u>

Propriété : si x est pair, alors x^2 est un multiple de 4.

② Un exemple de nombre irrationnel.

Rappel : on dit qu'un nombre est rationnel si on peut l'écrire comme une fraction d'entiers, c'est-à-dire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{N}^*$.

Propriété : $\sqrt{2}$ est irrationnel (c'est-à-dire n'est pas rationnel).

Preuve : on va faire un <u>raisonnement par l'absurde</u> : on part d'une hypothèse, on en déduit quelque chose <u>qui n'est pas vrai</u>, et ceci <u>prouve que l'hypothèse était fausse</u>.

Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel : on peut donc l'écrire comme une fraction irréductible $\frac{a}{b}$. On a $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longleftrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$

c'est l'hypothèse !

$$\Longleftrightarrow 2 \times b^2 = a^2.$$

Puisque a^2 s'écrit $2 \times (\ldots)$, il est pair, et donc a est pair lui aussi : on en déduit qu'il s'écrit $a = 2 \times k$ pour un certain entier k, et que

$$2 \times b^2 = a^2 \Longleftrightarrow 2 \times b^2 = (2 \times k)^2 \Longleftrightarrow \cancel{2} \times b^2 = \cancel{2} \times 2 \times k^2.$$

Puisque $b^2 = 2 \times (\ldots)$, il est pair, et donc b est pair lui aussi.
Et on a donc démontré que a et b sont tous les deux pairs, c'est-à-dire que la fraction $\frac{a}{b}$ se simplifie par 2. C'est faux puisque par hypothèse elle est irréductible. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

C.Q.F.D.

la contradiction qu'on a déduite

PROPRIÉTÉ : soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\sqrt{n}$ n'est pas un entier, alors il est irrationnel.

③ Ensembles de nombres

On met une petite étoile pour dire qu'on retire 0 :
$\mathbb{N}^* = \{1; 2; \ldots\}$
$\mathbb{Z}^* = \{\ldots; -2; -1; 1; \ldots\}$
etc.

$\mathbb{N}$: les entiers naturels $\{0; 1; 2; 3; \ldots\}$
$\mathbb{Z}$: les entiers relatifs $\{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$
$\mathbb{D}$: les nombres décimaux
$\mathbb{Q}$: les nombres rationnels
$\mathbb{R}$: les nombres réels (c'est-à-dire tous les nombres)

$x \in \mathbb{Z}$ se lit :
« x appartient à l'ensemble des entiers relatifs »
ou plus simplement : « x est un entier relatif ».

les ensembles de nombres sont inclus les uns dans les autres