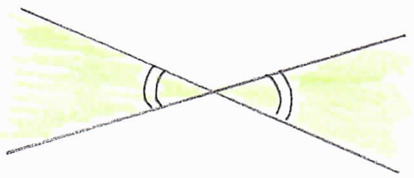
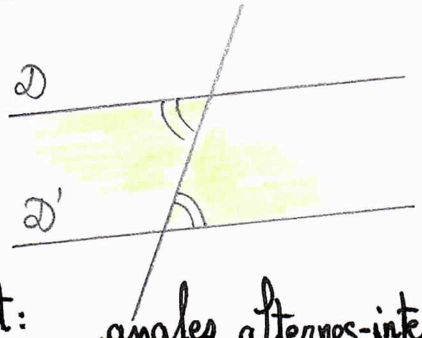
Leçon 4 : Théorème de Thalès, homothéties

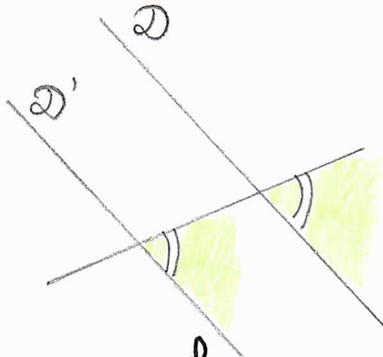
① Secteurs angulaires



angles opposés par le sommet : toujours superposables



angles alternes-internes : superposables si et seulement si $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$



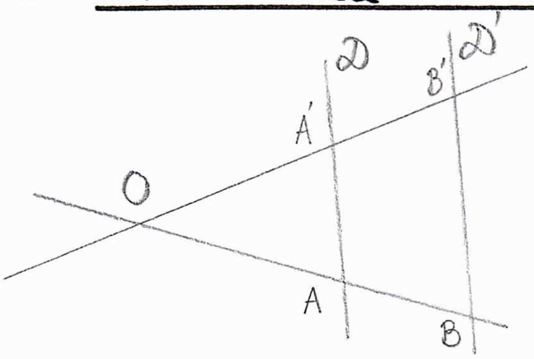
angles correspondants : superposables si et seulement si $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$.

Conséquence :

i) si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre ;

ii) réciproquement, si deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires à une même troisième, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

② Théorème de Thalès



Théorème : dans la configuration ci-contre :

i) si $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ alors

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}.$$

ii) Réciproquement si deux des trois rapports ci-dessus sont égaux, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

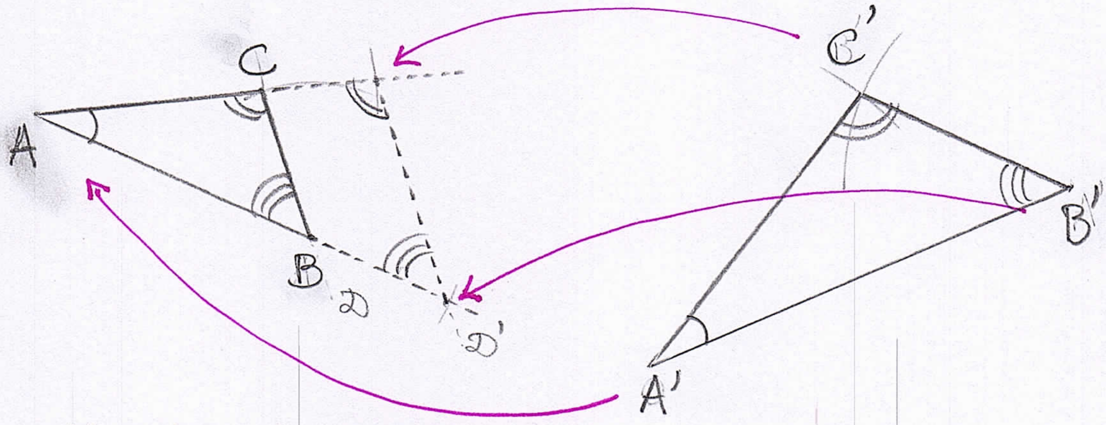
Remarque : l'égalité des rapports signifie que

OA	OA'	AA'
OB	OB'	BB'

est un tableau de proportionnalité.

③ Triangles semblables

Propriété : si deux triangles ont deux à deux les mêmes angles, alors leurs côtés ont des longueurs proportionnelles.



Si on déplace l'un des triangles, on obtient une situation de Thalès !

→ L'égalité des angles assure que $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$, et le théorème de Thalès donne alors $\boxed{\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}}$. $\times k$

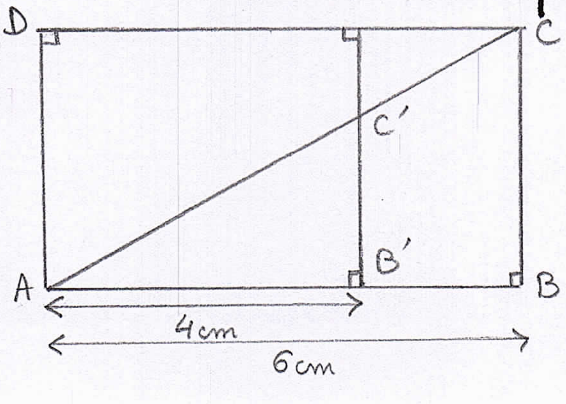
Propriété : dans la même situation, notons k le rapport de proportionnalité. Alors $\boxed{\mathcal{A}_{A'B'C'} = k^2 \times \mathcal{A}_{ABC}}$.

④ Homothéties

Propriété : lorsqu'on applique une homothétie (c'est-à-dire un changement d'échelle) à une figure :

- toutes les longueurs sont multipliées par un même nombre k,
- l'aire est multipliée par k^2.

Exemple :



Calcul du rapport : $\boxed{k = \dfrac{6}{4}}$

* $BC = B'C' \times \dfrac{6}{4}$
* $AC = AC' \times \dfrac{6}{4}$
* $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AB'C'} \times \left(\dfrac{6}{4}\right)^2$.