Jour 5

VECTEURS

solutions

Exercice 1

a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-1 \\ -2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) On a

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_C - 1 \\ y_C - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_C - 1 = 3 \\ y_C - (-3) = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_C - 1 = 3 \\ y_C + 3 = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = -1. \end{cases}$$

Donc les coordonnées du point C sont $(4\,;\,-1)$.

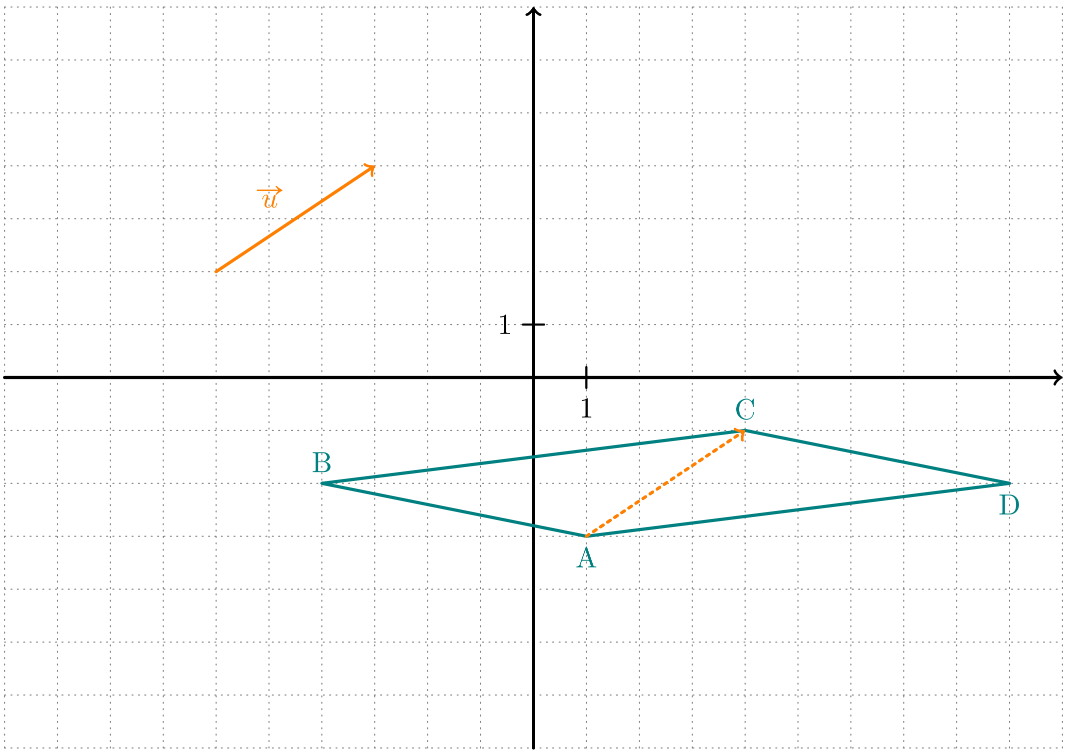
c) On a

$$\text{ABCD est un parallélogramme} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{AB}} \\ y_{\overrightarrow{AB}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - x_D \\ -1 - y_D \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -5 = 4 - x_D \\ 1 = -1 - y_D \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = -2. \end{cases}$$

Donc les coordonnées du point D sont $(9\,;\,-2)$.

On va faire la figure pour vérifier ! (Et évidemment, il ne faut pas hésiter à la faire dès le départ, *même si l'énoncé ne le demande pas*).



Question 1

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ensuite on fait le produit en croix :

$$x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} - x_{\overrightarrow{AC}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = (-3) \times (-3) - 3 \times 2 = 9 - 6 = 3.$$

Il n'est pas nul, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Question 2

On a déjà les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$:

$$\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ y-1 \end{pmatrix}.$$

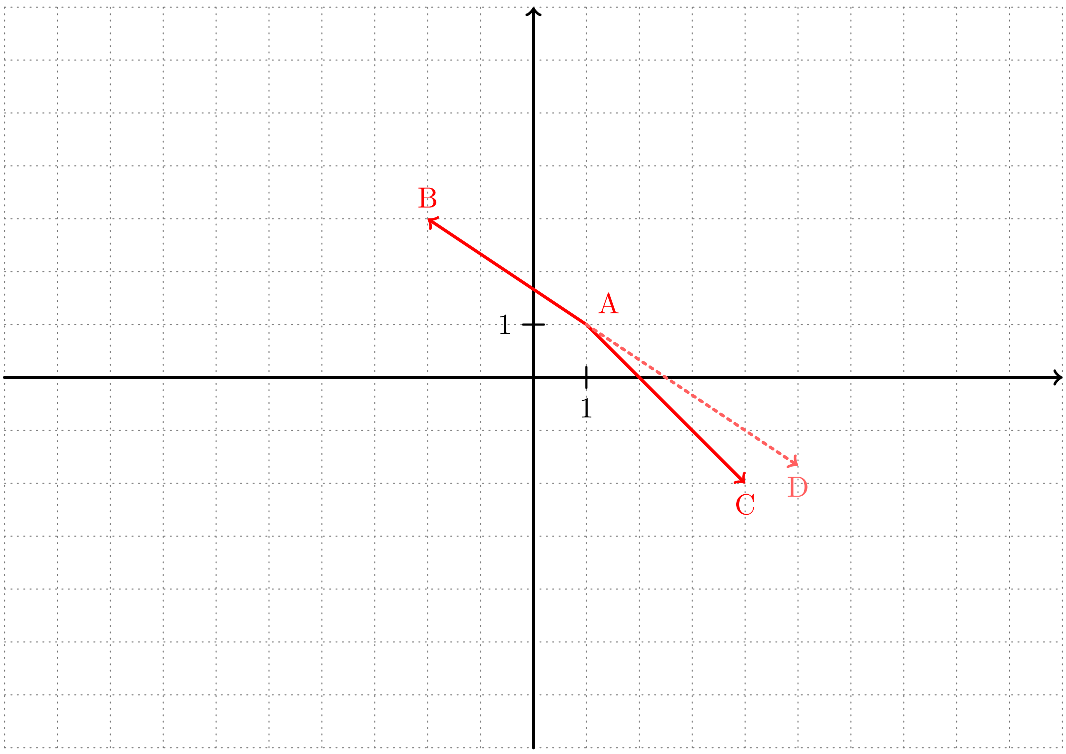
Ensuite on fait le produit en croix :

$$x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AD}} - x_{\overrightarrow{AD}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = (-3) \times (y-1) - 4 \times 2 = -3y + 3 - 8 = -3y - 5.$$

Les vecteurs sont colinéaires si et seulement si ce produit en croix est nul, c'est-à-dire

$$-3y - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5 = 3y \quad \Leftrightarrow \quad -5/3 = y.$$

Faisons le dessin pour vérifier tout ça.



Question 3

Puisque $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires, l'un des deux est un multiple de l'autre. On va traiter deux cas.

Premier cas : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est le vecteur nul (c'est-à-dire si A et B sont confondus). Alors $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ est aussi le vecteur nul, et en particulier il est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ puisqu'on a alors

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{0} = 0 \times \overrightarrow{\mathrm{BC}}.$$

Second cas : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ n'est pas le vecteur nul (c'est-à-dire si A et B sont distincts). La colinéarité dit qu'on a soit $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \lambda \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, soit $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \lambda' \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, pour certains nombres λ et λ'. Mais comme $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \neq \overrightarrow{0}$, on a forcément $\lambda' \neq 0$ dans la deuxième relation, qui s'écrit aussi

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1}{\lambda'} \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \lambda \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ si l'on pose $\lambda = 1/\lambda'$. Et donc quoi qu'il arrive on est sûr que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \lambda \times \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ pour un certain nombre λ.

Maintenant on peut calculer, avec la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \lambda \times \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} - \lambda \times \overrightarrow{\mathrm{BA}} = (1-\lambda) \times \overrightarrow{\mathrm{BA}}.$$

Et donc $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ sont colinéaires.

Question 4

Si l'on note $x = x_\mathrm{M} - x_\mathrm{A}$, $y = y_\mathrm{M} - y_\mathrm{A}$, $x' = -b$ et $y' = a$, on obtient

$$x \times y' - x' \times y = (x_\mathrm{M} - x_\mathrm{A}) \times a - (y_\mathrm{M} - y_\mathrm{A}) \times (-b) = a(x_\mathrm{M} - x_\mathrm{A}) + b(y_\mathrm{M} - y_\mathrm{A}),$$

et donc la relation $a(x_\mathrm{M} - x_\mathrm{A}) + b(y_\mathrm{M} - y_\mathrm{A}) = 0$ correspond bien au fait que les vecteurs sont colinéaires.

Question 5

D'après la question **4**, si l'on a $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{D}$, alors on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{u}$ colinéaires d'une part, et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{u}$ d'autre part. Et donc, avec la transitivité, on en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.

Question 6

Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires. On considère une équation $ax + by + c = 0$ de la droite (AB), et on définit le vecteur $\overrightarrow{u}$ comme précédemment. Puisque $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, et que ce dernier est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, on a $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{u}$ colinéaires. Ce qui veut dire, on l'a vu, que

$$a(x_\mathrm{C} - x_\mathrm{A}) + b(y_\mathrm{C} - y_\mathrm{A}) = 0.$$

On développe :

$$ax_\mathrm{C} - ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{C} - by_\mathrm{A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax_\mathrm{C} + by_\mathrm{C} - (ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax_\mathrm{C} + by_\mathrm{C} + c = 0,$$

puisque $\mathrm{A} \in \mathscr{D}$ implique $ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + c = 0$, ou encore $ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} = -c$. Donc le point C vérifie l'équation de la droite (AB), ce qui veut dire qu'il est dessus, et donc qu'il est aligné avec A et B.

Question 7

Supposons d'abord que y'' n'est pas nul. On obtient

$$x'y'' - x''y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' = \frac{x''y'}{y''}.$$

On remplace ensuite dans la première relation :

$$0 = xy' - x'y = xy' - \frac{x''y'}{y''} \times y = \frac{xy'y''}{y''} - \frac{x''y'y}{y''} = \frac{y'}{y''} \times (xy'' - x''y).$$

D'après le théorème du produit nul, on en déduit que soit $y' = 0$, soit $xy'' - x''y = 0$. Dans ce dernier cas, on a démontré ce qu'on voulait. Il faut alors regarder ce qu'il advient lorsque $y' = 0$. On a

$$x'y'' - x''y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'y'' = 0,$$

c'est-à-dire $x' = 0$ puisqu'on a supposé dès le départ que $y'' \neq 0$. Et donc $\overrightarrow{v}$ est le vecteur nul (puisque $x' = y' = 0$). Là on est coincé : $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{0}$, qui lui-même sera toujours colinéaire à $\overrightarrow{w}$, sans pour autant que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ soient colinéaires. Il faut donc changer l'énoncé, pour éliminer ce cas : « la relation de colinéaire est transitive sur les vecteurs *non nuls* ».

Gardons cette restriction, et supposons maintenant que $y'' = 0$, ainsi on aura démontré la propriété (corrigée !) dans tous les cas. La deuxième équation devient

$$x'y'' - x''y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x''y' = 0,$$

et donc soit $x'' = 0$ soit $y' = 0$. On ne peut pas avoir $x'' = 0$, car comme on a déjà $y'' = 0$, le vecteur $\overrightarrow{w}$ serait le vecteur nul, et on a éliminé ce cas. Donc $y' = 0$, et la première relation devient

$$xy' - x'y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'y = 0.$$

À nouveau, on ne peut pas avoir $x' = 0$ (sinon, comme on a déjà $y' = 0$, le vecteur $\overrightarrow{v}$ serait le vecteur nul), donc c'est y qui est nul. Et du coup

$$xy'' - x''y = x \times 0 - x'' \times 0 = 0,$$

c'est ce qu'on voulait.