Jour 4

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS AVEC DES VALEURS ABSOLUES

solutions

Exercice 1

a) Eh bien c'est parti :

$$|x+2| = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} x+2=5 & \text{ou} & x+2=-5 \\ x=3 & & x=-7. \end{array}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \{-7\,;\,3\}$.

b)

$$|3x-4| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} 3x-4=2 & \text{ou} & 3x-4=-2 \\ 3x=6 & & 3x=2 \\ x=2 & & x=2/3. \end{array}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \{2/3\,;\,2\}$.

c)

$$|x^2+x+1| = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} x^2+x+1=6 & \text{ou} & x^2+x+1=-6 \\ x^2+x-5=0 & & x^2+x+7=0. \end{array}$$

Ce qui fait deux équations du deuxième degré à résoudre. Commençons par la seconde : $a = 1$, $b = 1$ et $c = 7$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 7 = -27$: elle n'a pas de solution. Ça, c'est réglé. Ensuite la première : $a = 1$, $b = 1$ et $c = -5$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 21$, il y a deux solutions

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{21}}{2 \times 1} \simeq -2{,}79\ldots$$

et

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{21}}{2 \times 1} \simeq 1{,}79\ldots$$

L'ensemble des solutions (de l'équation de départ) est donc

$$\mathscr{S} = \left\{ \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\,;\,\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \right\}.$$

d)

$$|4x-5| \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leqslant 4x-5 \leqslant 3 \quad \overset{+5}{\Leftrightarrow} \quad 2 \leqslant 4x \leqslant 8 \quad \overset{\div 4}{\Leftrightarrow} \quad 1/2 \leqslant x \leqslant 2.$$

L'ensemble des solutions est donc l'intervalle $\mathscr{S} = [1/2\,;\,2]$.

Question 1

En utilisant $a = c - r$ et $b = c + r$ on voit que

$$|x-c| \leqslant r \quad \Leftrightarrow \quad -r \leqslant x-c \leqslant r \quad \Leftrightarrow \quad c-r \leqslant x \leqslant c+r \quad \Leftrightarrow \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Question 2

Bon, on recommence :

$$|x-4| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x-4 \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leqslant x \leqslant 5.$$

Il s'agit donc de l'intervalle $[3\,;\,5]$, dont le centre est 4 et le rayon 1. Bah oui : $|x-4| \leqslant 1$ c'est $|x-c| \leqslant r$ avec $c=4$ et $r=1$.

Question 3

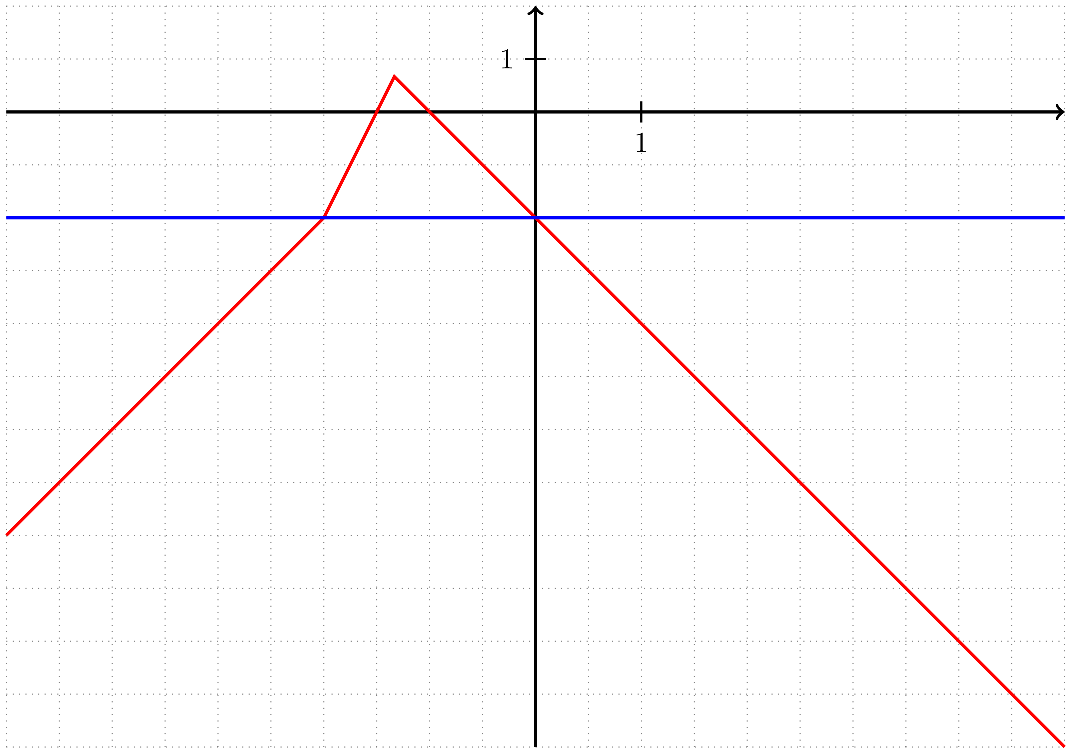
Encore une fois :

$$|x+3| \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leqslant x+3 \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leqslant x \leqslant -1.$$

Il s'agit donc de l'intervalle $[-5\,;\,-1]$, dont le centre est -3 et le rayon 2. Là aussi, on le voyait en fait dès le départ : $|x+3| \leqslant 2$ c'est $|x-c| \leqslant r$ avec $c=-3$ (parce que $-(-3)=+3$) et $r=2$.

Question 4

Graphiquement, on trace la fonction constante égale à -2, et on regarde les abscisses (les « x ») où les courbes se coupent.



Et bien il y a deux solutions : -2 et 0.

Question 5

Bon alors sur le graphique on voit que l'ensemble des solutions est $[-2\,;\,0]$. Retrouvons ceci par le calcul.

Il faut distinguer trois cas. Lorsque $x \in]-\infty\,;\,-2]$, on a $f(x) = 2x+2$, et donc l'inéquation devient

$$f(x) \geqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x+2 \geqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \geqslant -4 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -2.$$

Puisqu'on est dans le cas $x \in]-\infty\,;\,-2]$, la seule possibilité qu'on trouve est $x=-2$.

Deuxième cas : $x \in [-2\,;\,-4/3]$. On a alors $f(x) = 4x+6$, c'est-à-dire

$$f(x) \geqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x+6 \geqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x \geqslant -8 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -2.$$

Donc c'est pas très drôle, on retrouve pareil ; sauf que cette fois on est dans le cas $x \in [-2\,;\,-4/3]$, et donc là-dedans, tout le monde est supérieur à -2, donc on prend tout.

Troisième et dernier cas : $x \in [-4/3\,;\,+\infty[$. On a alors $f(x) = -2x-2$, donc

$$f(x) \geqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x-2 \geqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant 0.$$

Attention à la dernière étape : on divise chaque membre de l'inéquation par -2, qui est négatif, donc le sens de l'inégalité change. On est dans le cas $x \in [-4/3\,;\,+\infty[$, il faut prendre tous les $x \leqslant 0$ là-dedans, c'est-à-dire $[-4/3\,;\,0]$.

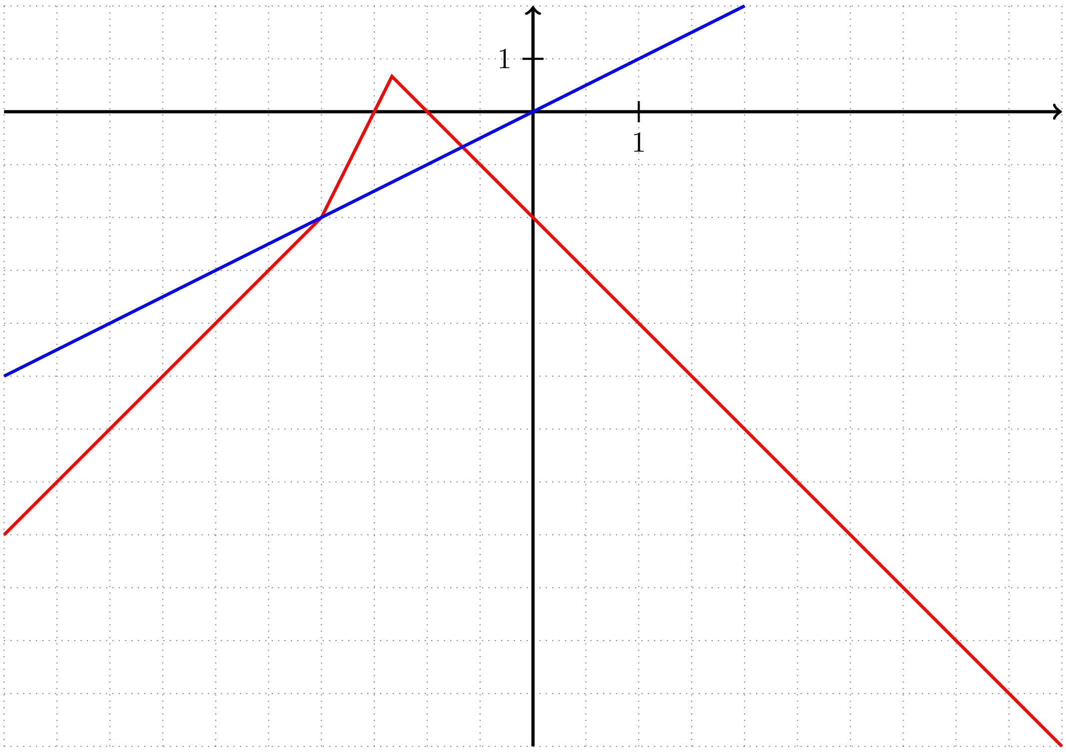
On conclut en mettant bout à bout les trois cas : l'ensemble des solutions est

$$\{-2\} \cup [-2\,;\,-4/3] \cup [-4/3\,;\,0] = [-2\,;\,0],$$

c'est bien ce qu'on attendait.

Question 6

Commençons graphiquement : on trace la courbe représentative de $g(x) = x$



et ça donne deux solutions : -2, et un mystérieux nombre entre -1 et $-1/2$, peut-être $-2/3$. On va voir ça par le calcul.

Mêmes trois cas à distinguer. Lorsque $x \in]-\infty\,;\,-2]$, on a $f(x) = 2x + 2$, et donc l'équation devient

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 = x \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.$$

Puisqu'on est dans le cas $x \in]-\infty\,;\,-2]$, la solution qu'on trouve est à conserver.

Deuxième cas : $x \in [-2\,;\,-4/3]$. On a alors $f(x) = 4x + 6$, c'est-à-dire

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 6 = x \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -6 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.$$

On est dans le cas $x \in [-2\,;\,-4/3]$, il faut donc conserver la solution qu'on trouve (parce qu'elle est dans l'intervalle). Bon, c'est la même que précédemment.

Troisième et dernier cas : $x \in [-4/3\,;\,+\infty[$. On a alors $f(x) = -2x - 2$, donc

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad -2x - 2 = x \quad \Leftrightarrow \quad -2 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad -2/3 = x.$$

On est dans le cas $x \in [-4/3\,;\,+\infty[$, la solution qu'on a trouvé s'y trouve, on la conserve.

Au final, on a bien trouvé deux solutions, -2 et $-2/3$.