Jour 3

TRIGONOMÉTRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

solutions

Exercice 1

a) L'angle $\widehat{\mathrm{BAH}}$ est évidemment le même que $\widehat{\mathrm{BAC}}$. Dans le triangle ABC rectangle en B, on a

$$\tan\widehat{\mathrm{BAH}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$

soit

$$\mathrm{mes}\Big(\widehat{\mathrm{BAH}}\Big) = \arctan\left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}\right) = \arctan\left(\frac{4}{7}\right) \simeq 29{,}745°.$$

b) Dans le triangle ABH rectangle en H on a

$$\cos\widehat{\mathrm{BAH}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{AH} = \mathrm{AB}\times\cos\widehat{\mathrm{BAH}} \simeq 7\,\mathrm{cm}\times\cos\big(29{,}745°\big) \simeq 6{,}078\,\mathrm{cm}.$$

c) Dans le triangle ABH rectangle en H on a

$$\sin\widehat{\mathrm{BAH}} = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{BH} = \mathrm{AB}\times\sin\widehat{\mathrm{BAH}} \simeq 7\,\mathrm{cm}\times\sin\big(29{,}745°\big) \simeq 3{,}473\,\mathrm{cm}.$$

d) Première manière : la trigonométrie. L'angle $\widehat{\mathrm{ACB}}$ est complémentaire à $\widehat{\mathrm{BAC}}$ (car dans le triangle ABC, la somme des deux angles « pas droits » vaut 90°) mais il est aussi complémentaire à $\widehat{\mathrm{HBC}}$ (car dans le triangle BCH, la somme des deux angles « pas droits » vaut 90°). Donc $\widehat{\mathrm{BAC}}$ et $\widehat{\mathrm{HBC}}$ ont la même mesure.

Dans le triangle BCH rectangle en H, on a donc

$$\sin\widehat{\mathrm{HBC}} = \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{BC}} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{CH} = \mathrm{BC}\times\sin\widehat{\mathrm{HBC}} \simeq 4\,\mathrm{cm}\times\sin\big(29{,}745°\big) \simeq 1{,}985\,\mathrm{cm}.$$

Deuxième manière : le théorème de Pythagore. Dans le triangle BCH rectangle en H on a

$$\mathrm{BH}^2+\mathrm{CH}^2=\mathrm{BC}^2 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{CH} = \sqrt{\mathrm{BC}^2-\mathrm{BH}^2} \simeq \sqrt{(4\,\mathrm{cm})^2-(3{,}473\,\mathrm{cm})^2} \simeq 1{,}985\,\mathrm{cm}.$$

Troisième manière : avec des aires. Celle de ABC vaut

$$\mathscr{A}_{\mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}}{2} = \frac{4\,\mathrm{cm}\times 7\,\mathrm{cm}}{2} = 14\,\mathrm{cm}^2.$$

Celle de ABH vaut

$$\mathscr{A}_{\mathrm{ABH}} = \frac{\mathrm{AH}\times\mathrm{BH}}{2} \simeq \frac{6{,}078\,\mathrm{cm}\times 3{,}473\,\mathrm{cm}}{2} \simeq 10{,}554\,\mathrm{cm}^2.$$

Par soustraction, celle de HBC vaut

$$\mathscr{A}_{\mathrm{HBC}} = \mathscr{A}_{\mathrm{ABC}} - \mathscr{A}_{\mathrm{ABH}} \simeq 14\,\mathrm{cm}^2 - 10{,}554\,\mathrm{cm}^2 \simeq 3{,}446\,\mathrm{cm}^2.$$

Et donc

$$\mathscr{A}_{\mathrm{HBC}} = \frac{\mathrm{CH}\times\mathrm{BH}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{CH} = \frac{2}{\mathrm{BH}}\times\mathscr{A}_{\mathrm{HBC}} \simeq \frac{2}{3{,}473\,\mathrm{cm}}\times 3{,}446\,\mathrm{cm}^2 \simeq 1{,}985\,\mathrm{cm}.$$

Bon donc évidemment on trouve trois fois la même chose.

Question 1

Donc évidemment dans toutes les questions, on parle de l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ qui est l'angle droit, donc c'est idiot... Il faut prendre l'angle $\widehat{\mathrm{B}}$ à la place (l'énoncé a été corrigé depuis). C'est parti.

Puisque BC est l'hypoténuse on a

$$\cos \widehat{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{BC} \times \cos \widehat{\mathrm{B}} = \mathrm{AB}.$$

Question 2

$$\sin \widehat{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{BC} \times \sin \widehat{\mathrm{B}} = \mathrm{AC}.$$

Question 3

D'après le théorème de Pythagore on a

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2.$$

Question 4

Dans l'égalité ci-dessous, remplaçons AB et AC par les expressions trouvées dans les deux premières questions. On obtient

$$\left(\mathrm{BC} \times \cos \widehat{\mathrm{B}}\right)^2 + \left(\mathrm{BC} \times \sin \widehat{\mathrm{B}}\right)^2 = \mathrm{BC}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{BC}^2 \times \left(\cos \widehat{\mathrm{B}}\right)^2 + \mathrm{BC}^2 \times \left(\sin \widehat{\mathrm{B}}\right)^2 = \mathrm{BC}^2.$$

En divisant par BC^2, qui n'est pas nul (sauf si les trois sommets du triangle sont confondus...) on trouve

$$\left(\cos \widehat{\mathrm{B}}\right)^2 + \left(\sin \widehat{\mathrm{B}}\right)^2 = 1.$$

Question 5

Les questions précédentes montrent que pour tout angle α on a $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$ (il suffit de choisir un triangle ABC dans lequel l'angle $\widehat{\mathrm{B}}$ vaut α). Maintenant, si on impose la condition $\cos(\alpha) = \sin(\alpha)$, cette relation devient

$$2 \times \cos(\alpha)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

On verra très bientôt, dans le chapitre de trigonométrie, que cos peut prendre des valeurs négatives si on envisage des angles qui ne sont pas entre zéro et quatre-vingt-dix degrés. Pour l'heure, la seule possibilité est

$$\alpha = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 45^\circ.$$