Jour 2

SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES ET PRÊTS

solutions

Question 1

Lorsque $a = 1$ on obtient $u_{n+1} = u_n + b$, qui est une suite arithmétique de raison b.

Question 2

On y va :

$$\omega = a\omega + b \quad \Leftrightarrow \quad \omega - a\omega = b \quad \Leftrightarrow \quad \omega \times (1 - a) = b$$

et, puisque $a \neq 1$ c'est-à-dire $1 - a \neq 0$, on peut diviser chaque membre par cette quantité pour obtenir

$$\omega = \frac{b}{1-a}.$$

Question 3

On est reparti (on pourrait appliquer la formule, puisqu'on l'a...) :

$$\omega = 3\omega - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5 = 2\omega \quad \Leftrightarrow \quad 2{,}5 = \omega.$$

Et donc, si on démarre à $u_0 = \omega$, on obtient $u_1 = u_0$, puis $u_2 = u_1$, c'est-à-dire la suite est constante.

Question 4

Eh bien on continue le calcul amorcé dans l'énoncé :

$$v_{n+1} = au_n + b - (a\omega + b) = au_n + b - a\omega - b = au_n - a\omega = a \times (u_n - \omega) = a \times v_n.$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison a.

Question 5

On en déduit que pour tout indice n, on a

$$v_n = v_0 \times a^n,$$

puis, en remplaçant v_n par $u_n - \omega$ et v_0 par $u_0 - \omega$, on trouve

$$u_n - \omega = (u_0 - \omega) \times a^n \quad \Leftrightarrow \quad u_n = (u_0 - \omega) \times a^n + \omega,$$

qui est bien la formule de l'énoncé (puisque $\omega = b/(1-a)$).

Question 6

On augmente la somme qui reste à rembourser, u_n, du taux $t/12$. Ce qui veut dire qu'on multiplie par $1+t/12$. Puis on retranche la mensualité : donc

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{t}{12}\right) - m.$$

Question 7

Alors : on remplace, dans la formule obtenue à la question **5**, u_0 par S, a par $1+t/12$ et b par $-m$, ce qui donne

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-m}{1-(1+t/12)} = \frac{-m}{1-1-t/12} = \frac{-m}{-t/12} = \frac{12m}{t}$$

et donc

$$u_n = (u_0-\omega)\times a^n + \omega = \left(\mathrm{S} - \frac{12m}{t}\right) \times \left(1+\frac{t}{12}\right)^n + \frac{12m}{t}.$$

Question 8

Pour que l'on puisse rembourser le prêt, il faut que (u_n) soit décroissante ! Comme $(1+t/12)^n$ ne peut qu'augmenter, il faut donc que le coefficient devant lui soit négatif, c'est-à-dire $\mathrm{S} - 12m/t < 0$.

Question 9

Dans le programme ci-dessous, la variable u représente les termes successifs de la suite (u_n), la variable `nb_mois` représente n, et la variable `Intérêts` représente la somme des intérêts qu'on a versé chaque mois à la banque (c'est-à-dire une fraction $t/12$ de u_n à la fin du mois n).

```
def SimulerPrêt(S, m, t) :
    u = S
    Intérêts = 0 ; nb_mois = 0
    while u > 0 :
        Intérêts += u * t / 12
        nb_mois  += 1
        u = u * (1 + t / 12) - m
    return (nb_mois, Intérêts)
```

Testons. D'abord un crédit de type consommation, durée assez courte (on trouve 56 mois, soit un peu plus de quatre ans et demi) mais taux élevé : 4,5 %.

```
>>> SimulerPrêt(50000, 1000, 0.045)
(56, 5474.718838095246)
```

Puis un crédit immobilier, beaucoup plus long (on trouve 161 mois, soit treize ans et demi), et un taux plus modéré : 2,2 %.

```
>>> SimulerPrêt(250000, 1800, 0.022)
(161, 38795.69074167166)
```

Remarque : la réalité est un peu différente. En pratique on connaît la durée, la somme à emprunter et le taux, et on cherche la mensualité (car le taux dépend en fait de la durée du crédit). Si la mensualité trouvée est inférieure ou égale à la capacité de remboursement du client, la banque accorde le prêt.