Jour 1

ÉQUATIONS DE DROITES

solutions

Exercice 1

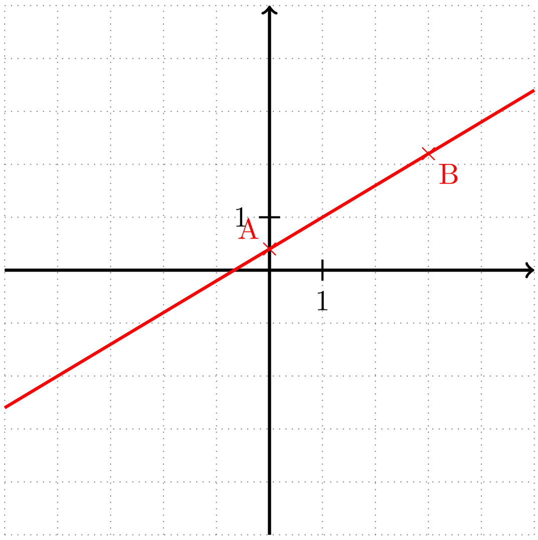
a) Pour $x = 0$ on a

$$3 \times 0 - 5y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 5y \quad \Leftrightarrow \quad 2/5 = y.$$

Pour $x = 3$ on obtient

$$3 \times 3 - 5y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 5y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 11 = 5y \quad \Leftrightarrow \quad 11/5 = y.$$

Les deux points correspondants sont A(0 ; 2/5) et B(3 ; 11/5), et voici la droite.



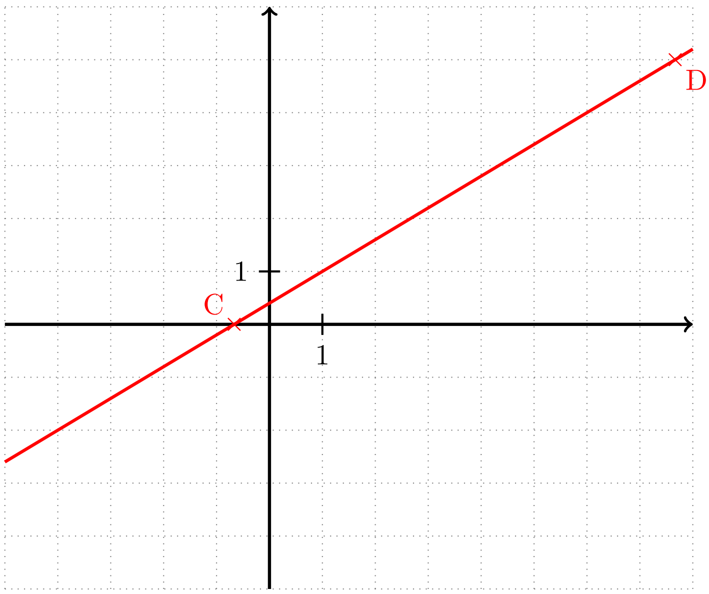
b) Pour $y = 0$ on a

$$3x - 5 \times 0 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2/3.$$

Pour $y = 5$ on obtient

$$3x - 5 \times 5 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 25 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 23 \quad \Leftrightarrow \quad x = 23/3.$$

Les deux points correspondants sont C(−2/3 ; 0) et D(5 ; 23/3), et on obtient évidemment la même droite.



Exercice 2

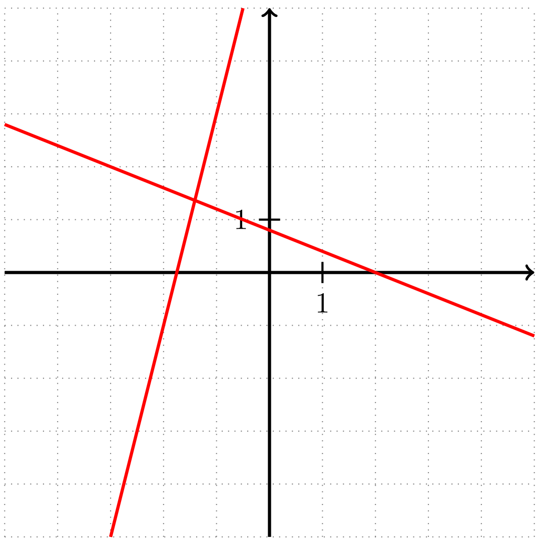
On est parti pour résoudre :

$$\begin{cases} 2x+5y-4=0 \\ 4x-y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5(4x+7)-4=0 \\ y=4x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+20x+35-4=0 \\ y=4x+7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+20x+35-4=0 \\ y=4x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22x+31=0 \\ y=4x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22x=-31 \\ y=4x+7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-31/22 \\ y=4x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-31/22 \\ y=4\times(-31/22)+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-31/22 \\ y=15/11 \end{cases}$$

Soit environ $x \simeq -1{,}41$ et $y = 1{,}36$. Voyons sur le dessin.



Question 1 — L'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées est le point de la droite tel que $x = 0$. Ce qui donne

$$a\times 0+by+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad by+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad by=-c \quad \Leftrightarrow \quad y=-c/b.$$

C'est bien la formule donnée pour p.

Question 2 — On poursuit le début de le démonstration suggérée :

$$y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} = (mx_{\mathrm{B}} + p) - (mx_{\mathrm{A}} + p) \quad \Leftrightarrow \quad y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} = mx_{\mathrm{B}} + p - mx_{\mathrm{A}} - p$$

$$\Leftrightarrow \quad y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} = mx_{\mathrm{B}} - mx_{\mathrm{A}} \quad \Leftrightarrow \quad y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} = m(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} = m$$

et on a le droit de diviser par $x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}$ parce qu'il est non nul (c'est à ça que sert l'hypothèse $x_{\mathrm{A}} \neq x_{\mathrm{B}}$).

Question 3 — La droite n'est pas verticale puisqu'elle passe par deux points ayant des abscisses différentes. Elle admet donc une équation réduite, c'est-à-dire de la forme $y = mx + p$, avec

$$m = \frac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} = \frac{2 - 3}{4 - (-1)} = \frac{-1}{5}$$

et

$$p = y_{\mathrm{A}} - m \times x_{\mathrm{A}} = 3 - \frac{-1}{5} \times (-1) = \frac{14}{5}.$$

La droite (AB) admet donc pour équation

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{14}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5y = -x + 14 \quad \Leftrightarrow \quad x + 5y - 14 = 0.$$

Question 4 — Écartons un cas particulier : si $b = 0$, alors $\mathscr{D}$ est verticale, et donc elle est parallèle à $\mathscr{D}'$ si et seulement si $\mathscr{D}'$ est elle-même verticale, c'est-à-dire lorsque $b' = 0$. L'équivalence est donc vraie dans ce cas particulier. On supposera dorénavant que b et b' ne sont pas nuls.

Multiplions la première équation par b' et la deuxième par b. On obtient les nouvelles équations $ab'x + bb'y + cb' = 0$ pour $\mathscr{D}$, et $a'bx + bb'y + c'b = 0$ pour $\mathscr{D}'$. Ce qui implique, en soustrayant les deux équations membres à membres, qu'on a

$$(ab' - a'b)x + cb' - c'b = 0$$

(les termes en y s'éliminent). Si $ab' - a'b = 0$, alors l'équation ci-dessus n'a plus d'inconnue ; elle est donc soit tout le temps vraie (et alors les deux droites sont confondues), soit tout le temps fausse (et alors les deux droites sont disjointes). Dans les deux cas les deux droites sont parallèles.

Réciproquement, si $ab' - a'b \neq 0$, alors on peut résoudre l'équation et obtenir

$$x = \frac{c'b - cb'}{ab' - a'b}.$$

On trouve le y correspondant en remplaçant dans n'importe laquelle des équations de départ, mais peu importe : on a trouvé une seule abscisse d'intersection, soit un seul point d'intersection (puisque les droites ne sont pas verticales). En particulier les droites ne sont pas parallèles.

Et finalement les deux conditions sont bien équivalentes.

Question 5 — On revient à une question facile, pour finir : les coefficients directeurs des deux droites sont $-a/b$ et $-a'/b'$. Or $ab' - a'b = 0$ si et seulement si a et b sont proportionnels à a' et b', c'est-à-dire les fractions a/b et a'/b' sont égales (donc avec un signe $-$ aussi). La condition devient donc : deux droites (non verticales) sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.