CHOSES DU DEUXIÈME DEGRÉ

solutions

Exercice 4

a) L'équation a du sens lorsque le dénominateur $x+3$ est différent de zéro, c'est-à-dire lorsque $x \neq -3$. Sous cette réserve, on a

$$\frac{x+2}{3} = \frac{2}{x+3} \overset{\text{produit en croix}}{\Leftrightarrow} (x+2)\times(x+3) = 3\times 2 \Leftrightarrow x^2+2x+3x+6 = 6$$

$$\overset{-6}{\Leftrightarrow} x^2+5x = 0 \Leftrightarrow x\times(x+5) = 0.$$

D'après le théorème du produit nul, on a donc $x = 0$ ou $x+5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$. Ces deux valeurs ne sont pas interdites, donc

$$\mathscr{S} = \{-5\,;\,0\}\,.$$

b) L'équation a du sens lorsque le dénominateur $2x+3$ est différent de zéro, c'est-à-dire lorsque $x \neq -3/2$. Sous cette réserve, on a

$$\frac{2x+2}{3} = \frac{2}{2x+3} \overset{\text{produit en croix}}{\Leftrightarrow} (2x+2)\times(2x+3) = 3\times 2 \Leftrightarrow 4x^2+4x+6x+6 = 6$$

$$\overset{-6}{\Leftrightarrow} 4x^2+10x = 0 \Leftrightarrow x\times(4x+10) = 0.$$

D'après le théorème du produit nul, on a donc $x = 0$ ou $4x+10 = 0 \Leftrightarrow x = -10/4 = -5/2$. Ces deux valeurs ne sont pas interdites, donc

$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{5}{2}\,;\,0\right\}.$$

c) L'équation a du sens lorsque les dénominateurs $x-3$ et $x+3$ sont différents de zéro, c'est-à-dire lorsque $x \neq 3$ et $x \neq -3$. Sous cette réserve, on a

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{x+2}{x+3} \overset{\text{produit en croix}}{\Leftrightarrow} (x+1)\times(x+3) = (x-3)\times(x+2)$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+3x+3 = x^2-3x+2x-6 \overset{-x^2}{\Leftrightarrow} 4x+3 = -x-6 \overset{+x\ ;\ -3}{\Leftrightarrow} 5x = -9 \overset{\div 5}{\Leftrightarrow} x = -9/5.$$

Cette valeur n'est pas pas interdite, donc

$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{9}{5}\right\}.$$

d) L'équation a du sens lorsque les dénominateurs $2x+1$ et $x+2$ sont différents de zéro, c'est-à-dire lorsque $x \neq -1/2$ et $x \neq -2$. Sous cette réserve, on a

$$\frac{x+2}{2x+1} = \frac{2x+1}{x+2} \quad \overset{\text{produit en croix}}{\Leftrightarrow} \quad (x+2)^2 = (2x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+4x+4 = 4x^2+4x+1$$

$$\overset{-4x}{\Leftrightarrow} \quad x^2+4 = 4x^2+1 \quad \overset{-x^2\ ;\ -1}{\Leftrightarrow} \quad 3 = 3x^2 \quad \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} \quad 1 = x^2.$$

On a donc $x = 1$ ou $x = -1$. Ces deux valeurs ne sont pas interdites, donc

$$\mathscr{S} = \{-1\,;\,1\}\,.$$

e) L'équation a du sens lorsque les dénominateurs x^2 et x^2+3 sont différents de zéro, c'est-à-dire lorsque $x \neq 0$ (le second dénominateur ne peut pas s'annuler). Sous cette réserve, on a

$$\frac{x+2}{x^2} = \frac{x-3}{x^2+3} \quad \overset{\text{produit en croix}}{\Leftrightarrow} \quad (x+2)\times(x^2+3) = x^2\times(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3+2x^2+3x+6 = x^3-3x \quad \overset{-x^3\ ;\ +3x}{\Leftrightarrow} \quad 2x^2+6x+6 = 0.$$

On obtient une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a=2$, $b=6$ et $c=6$. Son discriminant est $\Delta = b^2-4ac = 6^2-4\times2\times6 = -12$, il est strictement négatif, donc il n'y a pas de solution. Ainsi

$$\mathscr{S} = \varnothing.$$

f) L'équation a du sens lorsque les dénominateurs $x+3$ et x^2+3 sont différents de zéro, c'est-à-dire lorsque $x \neq -3$ (le second dénominateur ne s'annule jamais). Sous cette réserve, on a

$$\frac{1}{x+3} = \frac{2}{x^2+3} \quad \overset{\text{produit en croix}}{\Leftrightarrow} \quad x^2+3 = 2x+6 \quad \overset{-2x\ ;\ -6}{\Leftrightarrow} \quad x^2-2x-3 = 0.$$

On obtient une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$, avec $a=1$, $b=-2$ et $c=-3$. Son discriminant est $\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times1\times(-3) = 16$, il est strictement positif, ce qui donne deux solutions

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2\times1} = -1,$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times1} = 3.$$

Comme ce ne sont pas des valeurs interdites, on conclut que

$$\mathscr{S} = \{-1\,;\,3\}\,.$$

Exercice 9

L'équation $x^2+px+3=0$ est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=p$ et $c=3$. Son discriminant est

$$\Delta = b^2-4ac = p^2-4\times1\times3 = p^2-12.$$

L'équation a au moins une solution si et seulement si $\Delta \geqslant 0$, c'est-à-dire $p^2-12 \geqslant 0$. On factorise

$$p^2-12 = (p-\sqrt{12})\times(p+\sqrt{12})$$

et on dresse le tableau de signe de cette quantité en fonction de p.

p	$-\infty$		$-\sqrt{12}$		$\sqrt{12}$		$+\infty$
$p-\sqrt{12}$		$-$		$-$	0	$+$	
$p+\sqrt{12}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\Delta = p^2 - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On s'intéresse aux valeurs de p qui rendent le discriminant positif : l'équation de départ a au moins solution lorsque

$$p \in \left]-\infty\,;\,-\sqrt{12}\right] \cup \left[\sqrt{12}\,;\,+\infty\right[.$$

Exercice 15

Si les solutions de l'équation sont α, $-\alpha$, β et $-\beta$, c'est que la forme factorisée s'écrit

$$a \times (x+\alpha) \times (x-\alpha) \times (x+\beta) \times (x-\beta) = 0.$$

On va développer le membre de gauche. Petit bout par petit bout, cela donne

$$(x+\alpha) \times (x-\alpha) = x^2 - \alpha^2$$

$$(x+\beta) \times (x-\beta) = x^2 - \beta^2$$

puis

$$(x^2-\alpha^2) \times (x^2-\beta^2) = x^4 - \alpha^2x^2 - \beta^2x^2 + \alpha^2\beta^2 = x^4 - (\alpha^2+\beta^2)x^2 + \alpha^2\beta^2.$$

Reste à tout multiplier par a et on obtient

$$ax^4 - a(\alpha^2+\beta^2)x^2 + a\alpha^2\beta^2.$$

Ce qui, par identification, donne $b = 0$, $c = -a(\alpha^2+\beta^2)$, $d = 0$ et $e = a\alpha^2\beta^2$. Mais donc en particulier $b = d = 0$.

Exercice 18

Sur la courbe, on lit $f(-3) = -2$, $f(-2) = 2$, $f(-1) = 4$, $f(0) = 4$, $f(1) = 2$ et $f(2) = -2$. Puisque $f(0) = c$, on a déjà $c = 4$. Ensuite on utilise au choix deux autres informations, par exemple

$$f(-1) = 4 \quad\Leftrightarrow\quad a \times (-1)^2 + b \times (-1) + 4 = 4 \quad\Leftrightarrow\quad a - b = 0$$

et

$$f(1) = 2 \quad\Leftrightarrow\quad a \times 1^2 + b \times 1 + 4 = 2 \quad\Leftrightarrow\quad a + b = -2.$$

En sommant (« membre à membre ») les deux équations on trouve

$$(a+b) + (a-b) = (-2) + 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2a = -2 \quad\Leftrightarrow\quad a = -1$$

et en effectuant la différence (toujours « membre à membre ») on obtient

$$(a+b) - (a-b) = (-2) - 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2b = -2 \quad\Leftrightarrow\quad b = -1.$$

Donc finalement $f(x) = -x^2 - x + 4$.

Exercice 33

Soit L la longueur du rectangle, et ℓ sa largeur. Le périmètre étant égal à 24, on a $\mathrm{L} + \ell = 12$, c'est-à-dire $\ell = 12 - \mathrm{L}$. L'aire d'un tel rectangle est donc

$$\mathscr{A} = \mathrm{L} \times \ell = \mathrm{L} \times (12 - \mathrm{L}) = -\mathrm{L}^2 + 12\mathrm{L}.$$

C'est une fonction de la forme $\mathscr{A}(\mathrm{L}) = a\mathrm{L}^2 + b\mathrm{L} + c$, avec $a = -1$, $b = 12$ et $c = 0$. La parabole qui la représente a ses branches tournées vers le bas, puisque $a < 0$, et son sommet $(\alpha\,;\,\beta)$ est localisé en

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \times (-1)} = 6 \quad \text{et} \quad \beta = \mathscr{A}(6) = 6 \times (12 - 6) = 36.$$

C'est la valeur maximale de la fonction, et donc le rectangle qui a l'aire la plus grande est celui de dimensions $\mathrm{L} = 6$, $\ell = 12 - \mathrm{L} = 6$ et d'aire $36\,\mathrm{cm}^2$. C'est un carré.

Exercice 37

Nommons A, B et C les sommets de ce triangle, de sorte qu'il soit isocèle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A, qui est aussi la médiatrice de [BC] (puisque le triangle est isocèle). L'aire du triangle est

$$\mathrm{A} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\mathrm{AH} \times \mathrm{BC}}{2} = \mathrm{AH} \times \mathrm{HB} = 20\,\mathrm{cm}^2.$$

D'autre part, appliquons le théorème de Pythagore pour voir que

$$\mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2 = \mathrm{AB}^2.$$

Le périmètre du triangle est

$$p = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA} = 2 \times \mathrm{AB} + 2 \times \mathrm{HB} = 50\,\mathrm{cm},$$

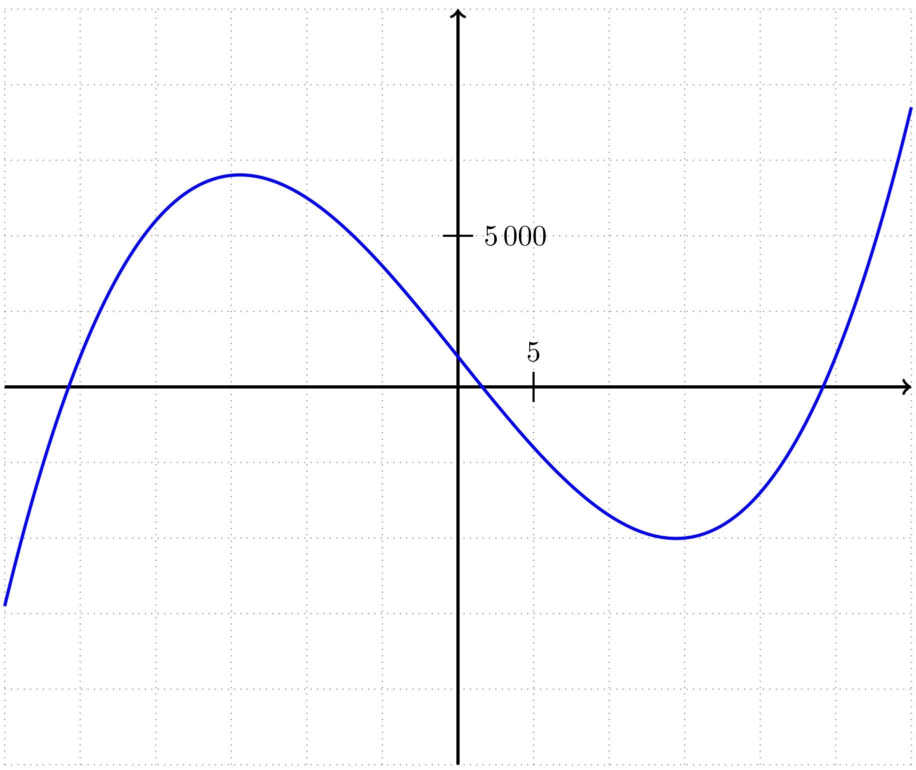
ce qui veut dire que $\mathrm{AB} = 25 - \mathrm{HB}$. Si on remplace dans la relation de Pythagore, on obtient

$$\mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2 = (25 - \mathrm{HB})^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2 = 625 - 50 \times \mathrm{HB} + \mathrm{HB}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{AH}^2 = 625 - 50 \times \mathrm{HB}.$$

En multipliant par AH, il vient

$$\mathrm{AH}^3 = 625 \times \mathrm{AH} - 50 \times \mathrm{AH} \times \mathrm{HB} = 625 \times \mathrm{AH} - 1000,$$

puisque $\mathrm{AH} \times \mathrm{HB} = 20$. Donc AH est solution de l'équation $x^3 - 625x + 1000 = 0$. Elle est du troisième degré, on va la résoudre numériquement : soit $f(x) = x^3 - 625x + 1000$. Voici un bout de la courbe représentative.



On cherche $f(x) = 0$. Il y a une solution négative qui ne nous intéresse pas (parce qu'on cherche une longueur) et deux solutions positives. Avec la calculatrice ou l'ordinateur, on trouve

$$x_1 \simeq 1{,}61\,\mathrm{cm} \quad \text{et} \quad x_2 \simeq 24{,}16\,\mathrm{cm}.$$

Revenons au problème initial : on a trouvé deux valeurs possibles pour la hauteur AH. La première donne

$$\mathrm{HB} = \frac{20\,\mathrm{cm}^2}{\mathrm{AH}} \simeq \frac{20\,\mathrm{cm}^2}{1{,}61\,\mathrm{cm}} \simeq 12{,}45\,\mathrm{cm} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{BC} \simeq 24{,}90\,\mathrm{cm}$$

et

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 25 - \mathrm{HB} \simeq 12{,}55\,\mathrm{cm}.$$

La deuxième donne

$$\mathrm{HB} = \frac{20\,\mathrm{cm}^2}{\mathrm{AH}} \simeq \frac{20\,\mathrm{cm}^2}{24{,}16\,\mathrm{cm}} \simeq 0{,}83\,\mathrm{cm} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{BC} \simeq 1{,}66\,\mathrm{cm}$$

et

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 25 - \mathrm{HB} \simeq 24{,}17\,\mathrm{cm},$$

(ce qui fait un triangle presque aplati).