

CHOSSES DU DEUXIÈME DEGRÉ

§1. Équations

1 Résoudre les équations suivantes :

- a) $x^2 + x = 0$, b) $2x^2 - 3x + 1 = 0$,
 c) $(x + 1)^2 - 3 = 0$, d) $x^2 + 4x - 1 = 0$,
 e) $1 - 5x - x^2 = 0$, f) $x^2 + 9x = -13$.

2 Même exercice :

- a) $x^2 + x + 1 = 0$, b) $x^2 - x - 1 = 0$,
 c) $x^2 - x + 1 = 0$, d) $x^2 + x - 1 = 0$,
 e) $x^2 + x - 2 = 0$, f) $x^2 - x - 2 = 0$.

3 Même exercice :

- a) $(x + 1)(x + 2) = 0$, b) $(x + 1)(x + 2) = 1$,
 c) $(x + 1)(2 - 3x) = 2$, d) $(x + 3)(x + 1) = x$,
 e) $(2 - x)(1 + x) = x^2$, f) $(x + 9)(2x - 5) = 1$.

4 Même exercice :

- a) $\frac{x+2}{3} = \frac{2}{x+3}$, b) $\frac{2x+2}{3} = \frac{2}{2x+3}$,
 c) $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x+2}{x+3}$, d) $\frac{x+2}{2x+1} = \frac{2x+1}{x+2}$,
 e) $\frac{x+2}{x^2} = \frac{x-3}{x^2+3}$, f) $\frac{1}{x+3} = \frac{2}{x^2+3}$.

5 Même exercice :

- a) $x^2 + 4x - 9 = 0$, b) $3x - 4 = x^2$,
 c) $(x + 2)^3 = (x + 1)^3$, d) $x^2 + 6x - 5 = 0$,
 e) $6 - 5x - x^2 = 0$, f) $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$.

6 Même exercice :

- a) $x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$, b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 3 = 0$,
 c) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0$, d) $x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{2} = 0$,
 e) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{4}x + 1 = 0$, f) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$,
 g) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = 0$, h) $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{5} = 0$.

7 Même exercice :

- a) $x^3 + 3x^2 - 2x = 0$,
 b) $(x + 3)^3 = (x + 2)^3$,
 c) $(x + 1)^2 - 3(x + 1)^3 = 0$,
 d) $(x^2 + x - 7)^2 = (x + 9)^2$,
 e) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$,
 f) $(x^2 + x - 6)^2 = 4$.

8 Même exercice :

- a) $x^2 + 5 = 0$, b) $2x^2 - 1 = 0$,
 c) $2x^2 - 3x = 0$, d) $x^2 - 20 = 0$,
 e) $6x^2 - 20 = 0$, f) $x^2 + x = x + 18$.

9 Déterminer les valeurs du paramètre $p \in \mathbf{R}$ pour lesquelles l'équation

$$x^2 + px + 3 = 0$$

possède au moins une solution.

10 Même exercice pour l'équation

$$x^2 + px = 4.$$

11 Même exercice pour l'équation

$$x^2 + px = p + 1.$$

12 Même exercice pour l'équation

$$x^2 + \frac{1}{p}x + p = 0.$$

13

- a) Résoudre l'équation $X^2 + 4X - 7 = 0$.
 b) Développer $(x - 3)^4 + 4(x - 3)^2 - 7$.
 c) Résoudre $x^4 - 12x^3 + 58x^2 - 132x + 110 = 0$.

14 Dans l'équation

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

on procède au changement d'inconnue $x = X + t$.

a) Développer courageusement

$$(X + t)^4 + a(X + t)^3 + b(X + t)^2 + c(X + t) + d.$$

b) Pour quelle valeur de t le coefficient devant X^3 est-il nul ?

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a , b , c et d pour que l'équation se ramène à une équation bicarrée, c'est-à-dire pour qu'après le changement d'inconnue il n'y ait plus ni terme en X^3 , ni terme en X .

15 🌡 On considère l'équation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

et on suppose qu'elle a quatre solutions deux à deux opposées : α , $-\alpha$, β et $-\beta$ (pas forcément distinctes). Montrer que $b = d = 0$.

§2. Fonctions polynomiales

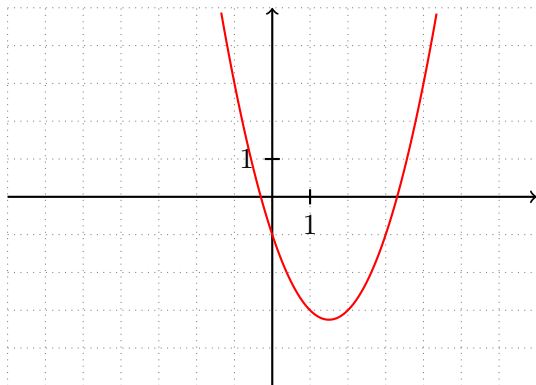
16 🌡 Tracer proprement les courbes représentatives des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = x^2 + x + 1$, b) $f_2(x) = x^2 + 2x + 1$,

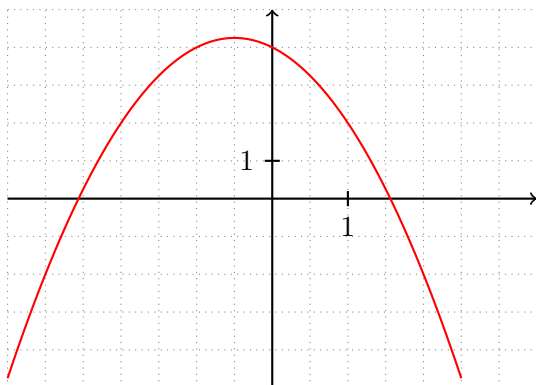
c) $f_3(x) = x^2 + x + 2$, d) $f_4(x) = x^2 + x - 1$,

e) $f_5(x) = x^2 + x - 2$, f) $f_6(x) = x^2 + 2x - 3$.

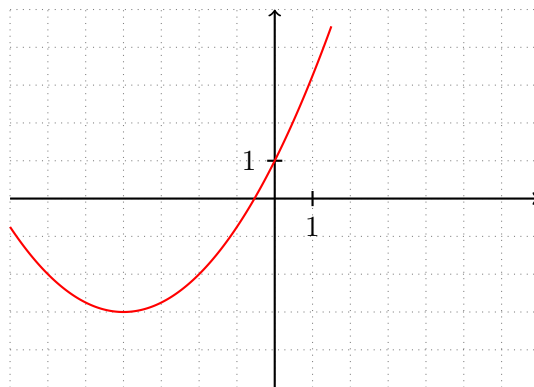
17 🌡 Déterminer la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ qui a la courbe représentative ci-dessous.



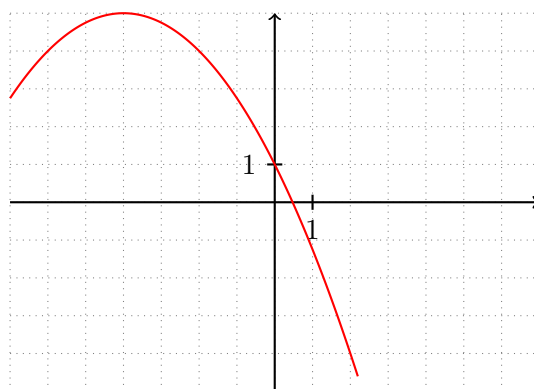
18 🌡 Même consigne.



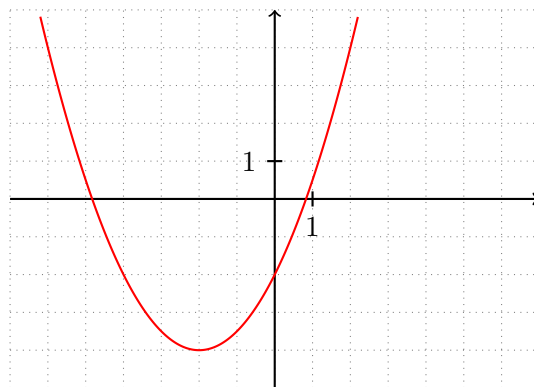
19 🌡 Même consigne.



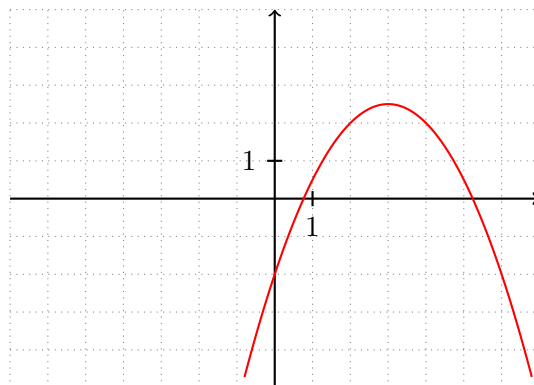
20 🌡 Même consigne.



21 🌡 Même consigne.



22 🌡 Même consigne.



23 Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

avec comme d'habitude $a \neq 0$. On note \mathcal{C} sa courbe représentative. Pour $m, p \in \mathbf{R}$, on considère également la droite \mathcal{D} d'équation $y = mx + p$.

a) Exprimer (en fonction de a , b et c et de m) la valeur de p pour laquelle \mathcal{D} est tangente à \mathcal{C} .

b) Quelle formule obtient-on pour $m = 0$?

24 Soit encore f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). On note \mathcal{C} sa courbe représentative. On considère la droite \mathcal{D} d'équation $y = p$, pour $p \in \mathbf{R}$.

a) Quelles sont les valeurs de p pour lesquelles \mathcal{D} et \mathcal{C} se rencontrent ?

b) Pour ces valeurs-là, on note A et B les points d'intersections (A et B peuvent être confondus). Exprimer en fonction de a , b et c la valeur de p pour laquelle on a $AB = 1$.

25 On reprend $f(x) = ax^2 + bx + c$ comme dans les exercices précédents, avec toujours \mathcal{C} sa courbe représentative. Soit $x_A \in \mathbf{R}$ et A le point de coordonnées $(x_A; 0)$.

a) Quelle est l'équation générale d'une droite \mathcal{D} passant par A ?

b) Donner une condition nécessaire et suffisante, sur a , b , c et x_A , pour qu'il existe une tangente à \mathcal{C} passant par A.

c) Donner alors l'équation de cette tangente, en fonction de a , b , c et x_A .

d) Soit m le coefficient directeur de cette tangente (lorsqu'elle existe). Peut-on avoir $m = 0$? Si non, le démontrer, et si oui, dans quel(s) cas ?

§3. Inéquations

26 Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a) $x^2 + x \geq 6$, | b) $x^2 + 1 \leq 5x$, |
| c) $(x+1)^2 < (x+3)^2$, | d) $(2x+1)^2 < (x+3)^2$, |
| e) $x^2 \leq 4 + x$, | f) $x^2 + x \leq -1/8$, |
| g) $x^2 \geq x$, | h) $x^2 + x + 3 \leq 0$. |

27 Même exercice :

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| a) $x^2 + 2x > 1$, | b) $x^2 + 3 \geq 3x$, |
| c) $x^2 + 2x < (x+3)^2$, | d) $(x+1)^2 \leq (3x-1)^2$, |
| e) $0 \leq x^2 + 3x - 4$, | f) $x^2 > x + 9$, |
| g) $5 \leq x^2 + 3x + 1$, | h) $x^2 - x \geq 15$. |

28 Même exercice :

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{x^2 + 1}{x - 3} \geq 1$, | b) $\frac{1}{x^2 - 4} \geq \frac{1}{x + 4}$, |
| c) $\frac{1}{2x + 1} \leq 3x - 4$, | d) $\frac{x^2 + x + 1}{x - 3} \geq x + 1$, |
| e) $\frac{x - 5}{x - 4} < \frac{x + 1}{x + 2}$, | f) $\frac{x^2 + 1}{x + 1} \leq 2x$. |

29 Même exercice :

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{x^2 - 1}{2x + 3} \leq 1$, | b) $\frac{1}{x^2 + 4} \geq \frac{3}{x - 4}$, |
| c) $\frac{1}{3x + 1} < x + 4$, | d) $\frac{x^2 + 1}{x + 3} \geq 5x - 9$, |
| e) $\frac{2x - 5}{2x - 4} < \frac{x - 1}{x - 2}$, | f) $\frac{x^2 + 1}{x + 1} \leq \frac{x^2 + 2}{x - 3}$. |

30 Résoudre l'inéquation

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 4 \geq 0.$$

31 Résoudre l'inéquation

$$x^3 + x^2 + x - 3 \geq 0.$$

32 Résoudre l'inéquation

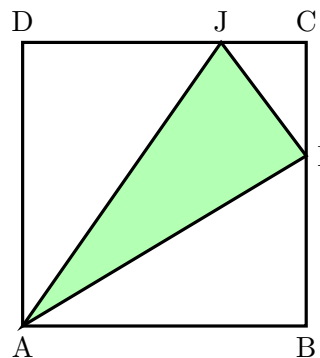
$$x^3 + 4x^2 - 8 \leq 0.$$

§4. Problèmes géométriques

33 Parmi tous les rectangles de périmètre égal à 24 cm, quelle est celui dont l'aire est la plus grande ? Justifier la réponse.

34 Parmi tous les rectangles d'aire égale à 50 cm², quel est celui dont le périmètre est le plus petit ? Justifier la réponse.

35 On considère un carré ABCD de côté 10 cm. On place un point J sur [DC] et un point I sur [BC] de sorte que IJ = 5 cm.



Entre quelles valeurs varie l'aire du triangle AIJ ?

36 🌡 Le périmètre d'un rectangle mesure 100 cm, et son aire est égale à 10 cm^2 . Calculer les dimensions de ce rectangle.

37 🌡 Un triangle isocèle a une aire égale à 20 cm^2 et un périmètre égal à 50 cm. Quelles sont ses dimensions ?

38 🌡 Soit r un nombre réel positif. On considère la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$ et le cercle \mathcal{C} de centre $(0, 4)$ et de rayon r .

a) Quelles sont les valeurs possibles pour le nombre de points d'intersections entre \mathcal{P} et \mathcal{C} ? Faire un petit schéma pour illustrer chaque cas.

b) Pour quelle valeur de r y a-t-il exactement trois points d'intersection ? Justifier la réponse. Quels sont les coordonnées de ces trois points ?

c) Pour quelle valeur de r y a-t-il exactement deux points d'intersection ? Quels sont alors les coordonnées de ces deux points ?

39 🌡 On généralise l'exercice précédent : le centre du cercle \mathcal{C} est le point $(0, p)$ avec $p > 0$. On a vu que pour $p = 4$, lorsque le rayon r augmente, il y a d'abord zéro, puis deux, puis quatre, puis trois, puis deux points d'intersection entre \mathcal{P} et \mathcal{C} .

a) Le nombre de points d'intersection évolue-t-il de la même manière lorsque $p = 1/4$?

b) Déterminer la valeur de p à partir de laquelle ce nombre d'intersections n'évolue plus dans l'ordre 0, 2, 4, 3, 2 lorsque le rayon augmente.

40 🌡 L'aire d'un triangle équilatéral, exprimée en cm^2 , a la même valeur que son périmètre, lorsqu'on exprime ce dernier en cm. Calculer le côté de ce triangle.

41 🌡 Dans un repère orthonormé, soit \mathcal{P} la parabole d'équation $y = x^2/4$.

a) Soit A un point de cette parabole. Justifier qu'il existe exactement deux points sur \mathcal{P} tels que $AM = 2$.

b) On note M_1 et M_2 ces deux points. Quelle est l'aire maximale du triangle AM_1M_2 ?

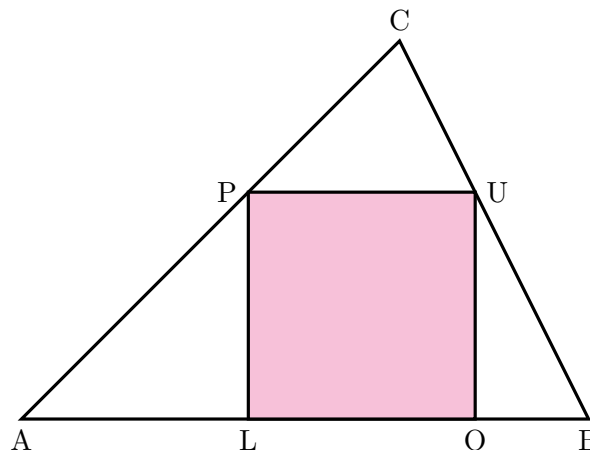
42 🌡 Dans un repère orthonormé, on considère les paraboles \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 d'équations respectives $y = x^2 + 4$ et $y = 1 + 3x - x^2$.

a) Dessiner, sur un même graphique, ces deux paraboles.

b) Justifier par le calcul que ces paraboles ne se coupent pas.

c) Trouver les points $A \in \mathcal{P}_1$ et $B \in \mathcal{P}_2$ qui sont les plus proches l'un de l'autre, c'est-à-dire tels que la longueur AB est minimale.

43 🌡 Un triangle ABC a pour dimensions $AB = 7 \text{ cm}$, $BC = 5 \text{ cm}$ et $CA = 6 \text{ cm}$. On y inscrit un carré LOUP, en plaçant L et O sur le segment [AB], U sur [BC] et P sur [CA].



Calculer l'aire du LOUP.