1$^{\text{ère}}$ GÉNÉRALE — *Exercices de mathématiques (spécialité)*

IDENTITÉS REMARQUABLES

solutions

Exercice 2

Développons le membre de droite :

$$\begin{aligned}(x^2+ax+k)\times(x^2-ax+k) &= x^4+ax^3+kx^2-ax^3-a^2x^2-kax+kx^2+kax+k^2\\ &= x^4+(2k-a^2)x^2+k^2.\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients avec ceux du membre de gauche x^4+k^2, on obtient l'équation

$$2k-a^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad a^2=2k \quad\Leftrightarrow\quad a=\pm\sqrt{2k}.$$

Puisqu'on a le facteur (x^2+ax+k) et le facteur (x^2-ax+k), choisir a positif ou négatif n'a aucune incidence : pour pouvoir factoriser x^4+k^2, il faut et il suffit donc de choisir $a=\sqrt{2k}$ et on aura alors

$$x^4+k^2=(x^2+ax+k)\times(x^2-ax+k).$$

Voyons maintenant les exemples proposés par l'énoncé.

a) Dans x^4+1 on a $k^2=1$, c'est-à-dire $k=1$, donc on prend $a=\sqrt{2\times 1}=\sqrt{2}$. Ainsi

$$x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)\times(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

Ceux qui n'y croient pas peuvent redévelopper, et constater que cela donne bien x^4+1, mais la démonstration qu'on a fait précédemment avec un k quelconque l'assure sans avoir à revérifier.

b) Dans x^4+2 on a $k^2=2$, c'est-à-dire $k=\sqrt{2}$, donc on prend $a=\sqrt{2\times\sqrt{2}}=\sqrt{2\sqrt{2}}$. Ainsi

$$x^4+2=(x^2+\sqrt{2\sqrt{2}}x+\sqrt{2})\times(x^2-\sqrt{2\sqrt{2}}x+\sqrt{2}).$$

c) Pour x^4-1, qui n'est pas de la forme x^4+k^2, il faut faire autrement : on utilise la troisième identité remarquable. On a

$$x^4-1=(x^2)^2-1=(x^2-1)\times(x^2+1)=(x-1)\times(x+1)\times(x^2+1),$$

et on ne peut pas faire mieux : x^2+1 ne se factorise pas (on peut le justifier de deux manières : en disant qu'il ne s'annule pas, ou bien en calculant son discriminant qui vaut -4).

d) Pour $2x^4+8=2\times(x^4+4)$, on a $k^2=4$, c'est-à-dire $k=2$, donc on prend $a=\sqrt{2\times 2}=2$. Ainsi

$$2x^4+8=2\times(x^2+2x+2)\times(x^2-2x+2).$$

e) Dans a^4+b^4, il y a un a qui entre en collision avec les notations de l'énoncé. Changeons un peu : considérons x^4+b^4. On a $k^2=b^4$, c'est-à-dire $k=b^2$, donc on prend $a=\sqrt{2\times b^2}=b\sqrt{2}$ (le a étant celui de la formule initiale). On trouve

$$x^4+b^4=(x^2+b\sqrt{2}x+b^2)\times(x^2-b\sqrt{2}x+b^2),$$

soit, en revenant aux notations de la question (c'est-à-dire en remplaçant x par a) :

$$a^4+b^4=(a^2+ab\sqrt{2}+b^2)\times(a^2-ab\sqrt{2}+b^2).$$

f) Enfin dans x^8+1, on repart du **a)** qui, avec un X, s'écrit

$$\mathrm{X}^4+1=(\mathrm{X}^2+\sqrt{2}\mathrm{X}+1)\times(\mathrm{X}^2-\sqrt{2}\mathrm{X}+1).$$

On remplace X par x^2 pour obtenir

$$x^8+1=(x^4+\sqrt{2}x^2+1)\times(x^4-\sqrt{2}x+1),$$

puisque $(x^2)^2=x^{2\times 2}=x^4$ et que $(x^2)^4=x^{2\times 4}=x^8$.

Exercice 3

Puisque $x!$ est une expression factorisée (c'est $x\times(x-1)\times(x-2)\times\ldots$), on va factoriser aussi le membre de droite de l'équation. On a

$$3x^2-9x+6=3\times(x^2-3x+2).$$

Dans le trinôme qui apparaît on a $a=1$, $b=-3$ et $c=2$, soit $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times2=1$. Il y a deux racines

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{3-1}{2}=1$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{3+1}{2}=2$$

et le trinôme se factorise en

$$x^2-3x+2=a\times(x-x_1)\times(x-x_2)=(x-1)\times(x-2).$$

Ainsi :

$$3x^2-9x+6=3\times(x-1)\times(x-2).$$

Regardons maintenant si 1 et 2 sont des solutions de l'équation :

$$1!=1\neq3\times1^2-9\times1+6=-2$$

et

$$2!=2\neq3\times2^2-9\times2+6=-8.$$

Donc x n'est ni égal à 1 ni égal à 2, c'est-à-dire $x-1\neq0$ et $x-2\neq0$, et on peut donc diviser chaque membre de l'équation par $x-1$ et $x-2$. Puisque $x!=x\times(x-1)\times(x-2)\times(x-3)!$, On obtient

$$x!=3\times(x-1)\times(x-2)\quad\Leftrightarrow\quad x\times(x-3)!=3.$$

La seule manière de factoriser 3 est $3=3\times1$, et comme à l'évidence x est plus grand que $(x-3)!$, on peut identifier les facteurs $x=3$ et $(x-3)!=(3-3)!=0!=1$. Conclusion

$$\mathscr{S}=\{3\}.$$

Exercice 4

On commence par faire apparaître un facteur commun :

$$x^4 + x^3 + x + 1 = x^3 \times (x + 1) + 1 \times (x + 1) = (x^3 + 1) \times (x + 1).$$

Reste donc à factoriser $x^3 + 1$, et pour cela on utilise les identités remarquables du troisième degré :

$$x^3 + 1 = (x + 1) \times (x^2 - x + 1).$$

On en est à

$$x^4 + x^3 + x + 1 = (x + 1) \times (x + 1) \times (x^2 - x + 1).$$

Et le dernier facteur ne se factorise pas davantage, parce que son discriminant est égal à -3.