1ère GÉNÉRALE — *Exercices de mathématiques (spécialité)*

IDENTITÉS REMARQUABLES

§1. Factorisations

1 Factoriser :

a) $(x+1)^2-4$,
b) $(x+2)^2-(x-1)^2$,
c) $(2x+1)^2-(2x+1)(x-3)$,
d) $(2x-1)^2-(x+1)^2$,
e) $x^2-(4x+9)^2$,
f) $(x+4)^3-(x+4)^2$.

2 Soit k un nombre positif. Déterminer (si c'est possible) un réel a tel que

$$x^4+k^2=(x^2+ax+k)(x^2-ax+k).$$

En déduire les factorisations de :

a) x^4+1, **b)** x^4+2,
c) x^4-1, **d)** $2x^4+8$,
e) a^4+b^4, **f)** x^8+1.

3 Trouver le (ou les) nombre(s) x tels que

$$x!=3x^2-9x+6.$$

4 Factoriser x^4+x^3+x+1.

§2. Identités remarquables

5 Compléter les expressions ci-dessous pour en faire des identités remarquables.

a) x^2+2x, **b)** x^2+4x, **c)** x^2+5x,
d) $2x^2+6x$, **e)** $3x^2-12x$, **f)** x^2-9x.

6 Ajouter une constante aux expressions ci-dessous pour en faire des identités remarquables.

a) x^2+2x+2, **b)** $2x^2+3x+1$,
c) x^2-5x-2, **d)** $2x^2-5x-3$,
e) $x^2-10x-10$, **f)** x^2+1.

7 Mettre les trinômes suivants sous forme canonique :

a) x^2+4x+1, **b)** x^2+3x+1,
c) x^2-5x-1, **d)** x^2+5x-2,
e) x^2-4x-7, **f)** x^2+x+1.

8 Même consigne :

a) $2x^2+2x+1$, **b)** $3x^2+3x+1$,
c) $4x^2+4x+1$, **d)** $2x^2+3x+1$,
e) $3x^2+4x-5$, **f)** $4x^2+5x+6$.

9 Même consigne :

a) $x^2+\sqrt{2}x+1$, **b)** $x^2+\sqrt{3}x+1$,
c) $x^2+x/2+1$, **d)** $x^2+x/3+1$,
e) $\sqrt{2}x^2+x/\sqrt{2}+1$, **f)** $\sqrt{3}x^2+x/\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

10 Soit $t\in[0\,;1[$. Dans un triangle rectangle, les côtés adjacents à l'angle droit mesurent $(1-t^2)/(1+t^2)$ et $2t/(1+t^2)$. Quelle est la longueur de l'hypoténuse ?

§3. Sommes de carrés

11 Développer :

a) $(a+2b)^2$, **b)** $(2a-3b)^2$,
c) $(a+\sqrt{a})^2$, **d)** $(a^2-b^2)^2$,
e) $(a+1/a)^2$, **f)** $(2a^2-1/a)^2$.

12 Simplifier au maximum :

a) $(x+1)^2+(x+2)^2$,
b) $(x+2)^2-(x+1)^2$,
c) $(2x+1)^2+(x+3)^2$,
d) $(2x-1)^2-(1-2x)^2$,
e) $(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2$,
f) $(3x+4)^2-(2x+3)^2-1$.

13 Exprimer en fonction de l'entier n les coefficients a, b et c tels que

$$ax^2+bx+c = (x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+\ldots+(x+n)^2.$$

14 Développer :

a) $(1/a+1/b)^2$, **b)** $(a/b-b/a)^2$, **c)** $(3a^2b-2ab^2)^2$, **d)** $(abc+3a^3)^2$, **e)** $(a^2b^2-4abc^2)^2$, **f)** $(a+1+1/a)^2$.

15 Développer :

a) $(a+b+c)^2$, **b)** $(a+b-c)^2$, **c)** $(a-b+c)^2$, **d)** $(a+b+c+d)^2$, **e)** $(a-b+c-d)^2$, **f)** $(a+b+c+d+e)^2$.

16 Simplifier au maximum :

a) $(x+y+1)^2+(x+y+2)^2$,
b) $(x+y+1)^2-(x-y+1)^2$,
c) $(x+y+5)^2-(x+y+3)^2$,
d) $(x-y+1)^2-(x+y-1)^2$,
e) $(x+y+1)^2+(x+y+2)^2+(x+y+3)^2$,
f) $(ax+by+c)^2+(a'x+b'y+c')^2$.

17 Exprimer en fonction de l'entier n les coefficients a, b, c, d, e et f tels que

$$ax^2+by^2+cx+dy+exy+f=\sum_{i=1}^{n}(x+y+i)^2.$$

18 Compléter la formule suivante :

$$\left(\sum_i x_i\right)^2 = \left(\sum_i \cdots\right) + 2\times\left(\sum_{i<j}\cdots\right).$$

19 **Hongrie, 1961.** Soient a et b deux nombres réels. Trouver tous les triplets $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ qui satisfont le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& a,\\ x^2+y^2+z^2 &=& b^2,\\ xy &=& z^2.\end{array}\right.$$

Pour quelles valeurs de a et b a-t-on x, y, z distincts et strictement positifs ?

§4. Sommes géométriques

20 Devélopper

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

et en déduire la factorisation de a^3+b^3.

21 Factoriser :

a) x^3-1, **b)** x^3-8, **c)** $2x^3-54$, **d)** x^4+x, **e)** $(x+1)^3+(x-1)^3$, **f)** x^6+1.

22 Dresser le tableau de signes de x^n-1. On distinguera les cas où n est pair, et les cas où n est impair.

23 Dresser le tableau de signes de

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1.$$

24 Résoudre l'équation

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

25 Soient a et b deux nombres réels.

a) Rappeler la définition de $\sqrt[3]{x}$, et justifier que pour tout exposant $n\in\mathbf{N}$ on a $\sqrt[3]{x^n}=(\sqrt[3]{x})^n$. La même règle est-elle vraie pour les racines carrées ?

b) Développer $(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$.

c) Prouver que $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ est strictement positif.

d) En déduire que la fonction racine cubique est croissante sur $\mathbf{R}$.

§5. Minorations, majorations

26 Soit x un nombre réel.

a) Développer $(x+1/2)^2$.

b) Quelle est la plus petite valeur possible pour $x^2+(x+1)^2$?

27 Soit a un nombre réel. Quelle est la plus petite valeur prise par $x^2+(x+a)^2$ lorsque x décrit $\mathbf{R}$?

28 Trouver le minimum de

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

lorsque x décrit $]0\,;+\infty[$.

29 Même question pour $g(x)=x+\dfrac{3}{x}$.

30 Trouver la valeur maximale prise par

$$h(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\times\frac{2t}{1+t^2}$$

lorsque $t\in\mathbf{R}$.