SUITES & SOMMES

§1. Suites logiques

1 Trouver les trois prochains termes de chacune des suites :

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, …
b) 1, 4, 2, 5, 3, 6, …
c) 0, 3, 7, 10, 14, 17, …
d) 0, 2, 6, 12, 20, 30, …
e) 0, 3, 8, 15, 24, 35, …
f) 0, 2, 12, 36, 80, 150, 252, …

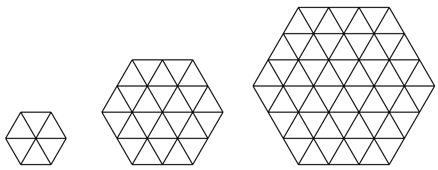
2 Même consigne :

a) 2, 2, 3, 7, 25, 121, …
b) 1, 2, 4, 9, 28, 125, …
c) 0, 1, 3, 7, 15, 31, …
d) 1, 3, 6, 11, 20, 37, …
e) 3, 8, 23, 68, 263, …
f) 1, 2, 5, 14, 41, 122, …

3 Trouver la suite : 1, 11, 21, 1 211, 111 221, 312 211, 13 112 221, 1 113 213 211, 31 131 211 131 221, ….

4 Écrire le programme qui renvoie le terme de rang n dans la suite de l'exercice précédent, en partant de $u_0 = 1$.

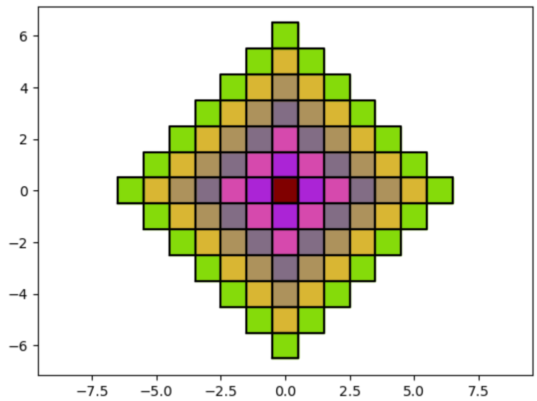
5 Soit n un entier naturel. On pave un hexagone régulier, de côté n, avec des petits triangles équilatéraux (tous de côté 1). On note u_n le nombre de triangles nécessaires à ce pavage.



$u_0 = 0$ $\quad u_1 = 6$ $\quad u_2 = 24$ $\quad u_3 = 54$

Trouver une formule explicite pour u_n.

6 Le plan est rapporté à un repère orthonormé. On part d'un petit carré, de côté 1, centré en $(0, 0)$. Ci-dessous, il est pourpre. Autour de lui, on met quatre autres petits carrés, identiques (violets). Autour d'eux, on en met encore 8 (roses). Et ainsi de suite, en ajoutant à chaque étape une « couronne » à la figure, jusqu'à avoir n couronnes autour du petit carré initial (pour $n = 0$, la figure est réduite à ce petit carré).

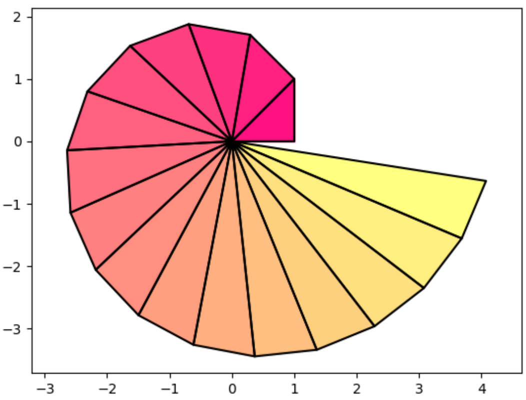


a) Combien y a-t-il de petits carrés sur la couronne numéro n ?

b) Trouver une formule explicite, en fonction de n, qui donne le nombre de petits carrés utilisés dans la figure à n couronnes. Dans le dessin ci-dessus, il y a $n = 6$ couronnes et 85 petits carrés.

c) Écrire le programme `Incliné(`n`)` qui fait le dessin.

7 Écrire un programme `Pythagore(`n`)` qui dessine une *spirale de Pythagore*. On l'obtient en partant d'un triangle isocèle rectangle, les côtés de l'angle droit mesurant 1. Puis on ajoute un deuxième triangle rectangle, l'un des côtés de l'angle droit est l'hypoténuse du précédent, et le deuxième mesure toujours 1. Et on recommence le même procédé ; le nombre n en entrée du programme représente le nombre de triangles à dessiner.



8 On cherche une méthode pour reconnaître les suites de la forme

$$u_n = an^2 + bn + c,$$

où a, b et c sont trois réels (avec $a \neq 0$).

a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = 2an + a + b$.

b) En déduire que la suite des écarts forme une progression arithmétique. Exprimer en fonction de a, b et c la raison p et le premier terme Δ_0 de cette progression.

c) Exemple : on considère la suite qui commence par

$$u_0 = 1,\ 12,\ 30,\ 55,\ 87,\ 126,\ \ldots$$

et dont on note u_n le terme général. Calculer les écarts, et en déduire p, Δ_0, puis a, b et c.

d) Quels sont les trois prochains termes ?

9

a) Calculer les premiers termes de la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$s_n = \frac{1-(-1)^n}{2}.$$

b) On considère la suite qui commence par les termes

$$u_0 = 0,\ 4,\ 7,\ 11,\ 14,\ 18,\ 21,\ \ldots$$

et dont on note u_n le terme général. À quelle suite arithmétique ressemble-t-elle ?

c) Trouver une formule explicite pour u_n.

10 Calculer les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_n = \left\lfloor \frac{5}{2}n + \frac{1}{4} \right\rfloor.$$

En déduire une formule explicite, à base de parties entières, de la suite qui commence par les termes

$$v_0 = 2,\ 9,\ 17,\ 24,\ 32,\ 39,\ 47,\ 54,\ 62,\ \ldots.$$

11 Trouver une formule explicite pour le terme général des suites commençant par :

a) $u_0 = 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ \ldots$
b) $u_0 = -2,\ 3,\ -2,\ 3,\ -2,\ 3,\ \ldots$
c) $u_0 = 0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 4,\ 0,\ \ldots$
d) $u_0 = 1,\ 0,\ 3,\ 2,\ 5,\ 4,\ 7,\ 6,\ \ldots$
e) $u_0 = 1,\ 0,\ 3,\ -2,\ 5,\ -4,\ 7,\ -6,\ \ldots$
f) $u_0 = 1,\ 2,\ -1,\ 4,\ -3,\ 6,\ -5,\ 8,\ -7,\ \ldots$
g) $u_0 = 1,\ -3,\ 2,\ -11,\ 12,\ -37,\ 58,\ -135,\ 248,\ -521,\ \ldots$

§2. Arithmétiques, géométriques

12 Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, trouver la valeur de u_{10}, puis celle de u_{100} :

a) $u_0 = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots$
b) $u_0 = 0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ \ldots$
c) $u_0 = 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ \ldots$
d) $u_0 = 10,\ 25,\ 40,\ 55,\ 70,\ 85,\ \ldots$
e) $u_0 = 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5,\ \ldots$
f) $u_0 = 7,\ 15,\ 23,\ 31,\ 39,\ 47,\ \ldots$

13 Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, trouver la valeur de u_0 à partir des informations proposées (p est la raison) :

a) $u_{10} = 100$ et $p = 5$,
b) $u_{100} = 10$ et $p = 5$,
c) $u_{100} = 10$ et $p = 1/5$,
d) $u_{10} = 5$ et $p = 10$,
e) $u_{100} = 5$ et $p = 1/100$,
f) $u_{10} = 10$ et $p = 1/10$.

14 Pour chacune des suites arithmétiques ci-dessous, trouver la raison p à partir des informations proposées :

a) $u_0 = 4$ et $u_{10} = 14$,
b) $u_1 = 5$ et $u_5 = 1$,
c) $u_3 = 3$ et $u_{13} = 26$,
d) $u_5 = 0$ et $u_{95} = 10$,
e) $u_{10} = 15$ et $u_{30} = 25$,
f) $u_0 = 4$ et $u_9 = 28$.

15 Une suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie les hypothèses suivantes :

$$u_0 + u_1 = 4 \quad \text{et} \quad u_2 + u_3 = 10.$$

a) On note p la raison de cette suite. Que vaut $u_2 - u_0$? Et $u_3 - u_1$?

b) En déduire que $4 \times p = 6$. Quelle est la valeur de p ?

c) Justifier que $2 \times u_0 = 2{,}5$. Que vaut u_0 ?

d) Donner les dix premiers termes de cette suite.

16 Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie $u_0 = 5$, $u_{40} = 35$ et $u_{100} = 50$. Peut-elle être arithmétique ? Justifier la réponse.

17 Déterminer si le nombre 1000 est un terme des suites arithmétiques suivantes (le nombre p est la raison) :

a) $u_0 = 0$ et $p = 4$,
b) $u_0 = 1$ et $p = 3$,
c) $u_0 = 2$ et $p = 7$,
d) $u_0 = 3$ et $p = 15$,
e) $u_0 = 4$ et $p = 17$,
f) $u_0 = 5$ et $p = 35$.

18 Existe-t-il une suite arithmétique qui, parmi ses dix premiers termes (de u_0 à u_9), prend les valeurs 1, 4 et 17 ?

19 Une suite arithmétique commence par le terme $u_0 = 1/2$ et a pour raison $p = 1/3$. Cette suite contient-elle des nombres entiers ? Justifier la réponse.

20 Reprendre l'exercice précédent avec $u_0 = 2/3$ et $p = 7/6$.

21 Est-ce qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ peut être à la fois arithmétique et géométrique ? Justifier la réponse.

22 Pour chacune des suites géométriques ci-dessous, trouver la raison q à partir des informations proposées :

a) $u_0 = 4$ et $u_2 = 1$,
b) $u_1 = 25$ et $u_3 = 5$,
c) $u_0 = 32$ et $u_4 = 4\,096$,
d) $u_0 = 1$ et $u_3 = 64$,
e) $u_3 = 15$ et $u_5 = 30$,
f) $u_1 = 3$ et $u_6 = 59\,049$.

23 Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est telle que

$$u_{n+2} - u_n = 1$$

pour tout indice n.

a) Donner un exemple de suite arithmétique qui vérifie cette hypothèse.

b) Donner un exemple de suite « pas arithmétique » qui vérifie cette hypothèse.

c) Démontrer qu'une telle suite ne peut pas être géométrique.

24 On considère une suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q > 1$.

a) Écrire un programme Python `Seuil(q)` qui détermine le plus petit indice n tel que $u_n \geqslant 1\,000$.

b) Qu'obtient-on pour $q = 2$? Et pour $q = 3$?

c) Reprendre les questions précédentes en remplaçant $1\,000$ par $1\,000\,000$ puis par $1\,000\,000\,000$. Que remarque-t-on ?

25 On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dont les premiers termes sont

$$u_1 = 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ \ldots.$$

a) On note $\mathrm{T}(n) = n(n+1)/2$ le n-ième nombre triangulaire. Dans la suite (u_n), que vaut le terme d'indice $\mathrm{T}(n)$?

b) Écrire un programme `Terme(n)` qui calcule et renvoie u_n.

c) Soit n un entier naturel. Résoudre l'inéquation

$$\mathrm{T}(x) \leqslant n,$$

d'inconnue x.

d) En déduire une formule explicite pour u_n.

§3. Sommes

26 Démontrer que pour tout entier naturel n on a

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

27 Calculer les sommes suivantes :

a) $S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 1000$,
b) $S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots + 1000$,
c) $S_3 = 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + \ldots + 1000$,
d) $S_4 = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + \ldots + 1000$,
e) $S_5 = 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + \ldots + 1000 + 1001$,
f) $S_6 = 1 + 11 + 21 + 31 + 41 + \ldots + 1001$.

28 Calculer la somme

$$3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15 + 18 + 20 + \cdots + 1\,000\,000$$

formée par tous les nombres, inférieurs ou égaux à 10^6, qui sont des multiples de 3 ou de 5.

29 Démontrer que pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier naturel n, on a

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

30 Calculer les sommes

a) $S_1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 65\,536$,
b) $S_2 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \ldots + 3\,486\,784\,401$,
c) $S_3 = 3 + 12 + 48 + 192 + \ldots + 805\,306\,368$.

31 On considère la somme

$$S_n = \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 + \cdots + (\sqrt{2})^n.$$

a) Expliciter S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.

b) Justifier rapidement que S_n est de la forme $a+b\sqrt{2}$ avec a et b entiers.

c) Calculer a et b lorsque $n = 10$.

d) Calculer a et b lorsque $n = 100$.

32 On considère la somme

$$S_n = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}-1)^2 + \cdots + (\sqrt{2}-1)^n.$$

a) Expliciter S_1, S_2 et S_3.

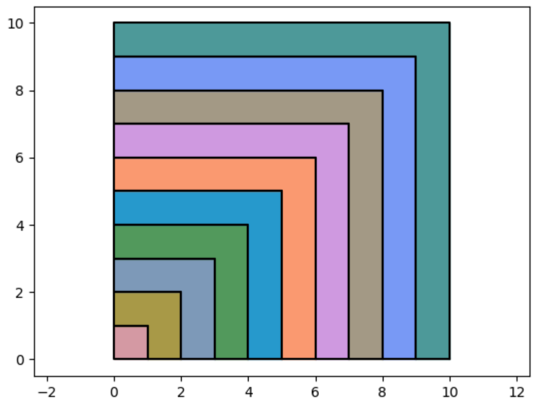
b) Justifier rapidement que S_n est de la forme $a + b\sqrt{2}$, avec a et b entiers.

c) Écrire un programme qui prend en entrée n et qui calcule a et b.

d) Démontrer que lorsqu'on prolonge la somme jusqu'à l'infini, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

33 Soit n un entier au moins égal à 1. On découpe un carré de taille $n \times n$ en n tranches d'épaisseur 1, en forme de « L » (à l'envers).



a) Écrire un programme `TranchesEnL(`n`)` qui réalise le dessin.

b) Si l'on numérote les tranches 1, 2, 3, …, n, de la plus petite à la plus grande, quelle est l'aire de la tranche numéro k ?

c) En déduire la valeur de $1+3+5+7+9+\cdots+101$.

34 Calculer

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n!$$

à l'aide d'une somme télescopique.

35 On pose

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

a) Démontrer que pour tout indice n, on a

$$s_{n+1} - s_n = (n+1)^2.$$

b) En déduire une formule pour calculer la somme des carrés $1+4+9+16+25+\cdots+n^2$.

§4. Développements décimaux

36 On considère le nombre réel

$$x = 0{,}999\,999\,999\,999\ldots$$

avec une infinité de 9. Que vaut $10x - 9$? Qu'en déduit-on sur la véritable valeur de x ?

37 On considère la somme « infinie »

$$s = \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \frac{1}{100^4} + \ldots.$$

a) Quelle est l'écriture décimale de s ?

b) Que vaut $100s - 1$?

c) En déduire la valeur exacte de s, sous la forme d'une fraction.

d) Quelle fraction simple est égale à

$$x = 4{,}191\,919\,191\,919\,191\ldots ?$$

38 Donner les écritures fractionnaires de :

a) $0{,}033\,033\,033\,033\,033\,033\,033\ldots$,
b) $1{,}111\,111\,111\,111\ldots$,
c) $0{,}035\,735\,735\,735\,7\ldots$,
d) $4{,}315\,252\,525\,252\,5\ldots$,
e) $1{,}414\,141\,414\,141\ldots$,
f) $10{,}011\,001\,100\,110\,011\,001\,100\ldots$.

39 Démontrer qu'un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal finit par être périodique. Ainsi par exemple

$$x = 5{,}147\,657\,657\,657\ldots$$

est rationnel, mais

$$y = 0{,}121\,121\,112\,111\,121\,111\,12\ldots$$

ne l'est pas.