# DEVOIR SURVEILLÉ N°1

*lundi 25 septembre 2023, 55 minutes*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Ils ne sont pas nécessairement rangés par ordre de difficulté. Les durées sont indicatives.

Les calculatrices, bouliers-compteurs et tous autres appareils de calcul sont interdits.

## Exercice I — Racines carrées (12 minutes)

Mettre les quantités suivantes sous la forme $a + b\sqrt{2}$, où $a$ et $b$ sont des nombres entiers ou rationnels.

**1)** $\mathrm{A} = (2 - \sqrt{2}) \times (3 + \sqrt{2})$,

**2)** $\mathrm{B} = (1 - \sqrt{2})^2$,

**3)** $\mathrm{C} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{2}}$,

**4)** $\mathrm{D} = \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}}$.

## Exercice II — Calcul littéral (10 minutes)

Soit $f(x) = (x - 3)^2 - 16$.

**1)** Mettre $f(x)$ sous forme développée.

**2)** Mettre $f(x)$ sous forme factorisée.

**3)** Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

## Exercice III — Suite logique (15 minutes)

On considère la suite « logique » démarrant par les termes

$$u_1 = -5, \quad u_2 = -1, \quad u_3 = 5, \quad u_4 = 13, \quad u_5 = 23, \quad \ldots$$

et on convient que chaque nouveau terme s'obtient à partir des précédents par un mécanisme simple.

**1)** Trouver les trois termes suivants. On expliquera le mécanisme utilisé ; celui-ci doit être compatible avec les termes déjà connus.

**2)** Soit $f(x) = mx + p$ une fonction affine telle que $f(1) = 4$, $f(2) = 6$, $f(3) = 8$, $f(4) = 10$, etc.. Déterminer $m$ et $p$.

**3)** Calculer la somme $4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + 202$.

**4)** En déduire la valeur de $u_{101}$, le cent-unième terme de la suite. On justifiera soigneusement la réponse.

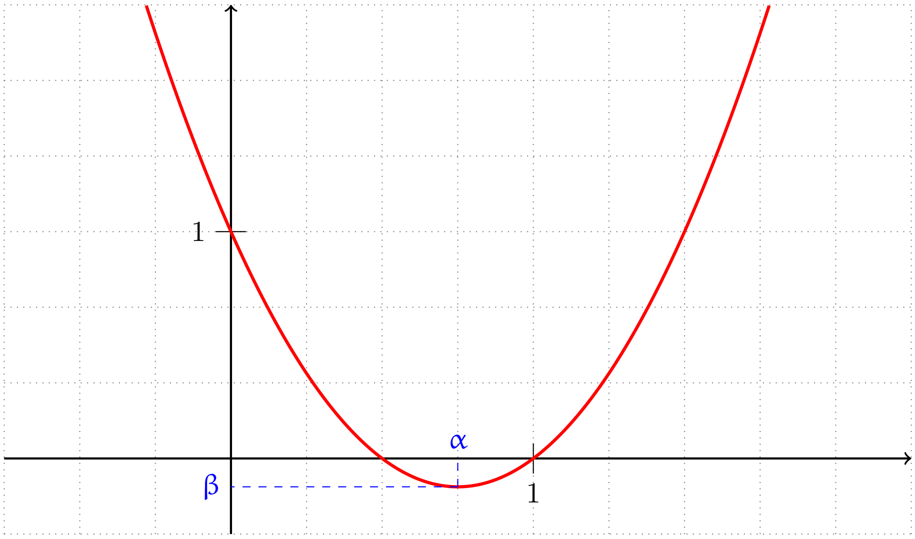
## Exercice IV — Fonction du deuxième degré (13 minutes)

Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

**1)** Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

**2)** Calculer $f(1/3)$.

On donne ci-dessous (une partie de) la courbe représentative de $f$. C'est bien sûr une parabole.




**3)** Retrouver *par le calcul* les coordonnées $(\alpha\,;\,\beta)$ du sommet de cette parabole.

**4)** Résoudre l'équation $f(x) = 2/9$.

## Exercice I — Racines carrées

**1.1)** On distribue :

$$A = (2-\sqrt{2}) \times (3+\sqrt{2}) = 6 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 = 4 - \sqrt{2}.$$

**1.2)** On utilise la deuxième identité remarquable :

$$B = (1-\sqrt{2})^2 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

**1.3)** On multiplie « en haut et en bas » par la quantité conjuguée :

$$C = \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1 \times (2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2}) \times (2+\sqrt{2})} = \frac{2+\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

**1.4)** Même chose :

$$D = \frac{3+2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} = \frac{(3+2\sqrt{2}) \times (1-2\sqrt{2})}{(1+2\sqrt{2}) \times (1-2\sqrt{2})} = \frac{3+2\sqrt{2}-6\sqrt{2}-8}{1-8} = \frac{-5-4\sqrt{2}}{-7} = \frac{5}{7} + \frac{4}{7}\sqrt{2}.$$

## Exercice II — Calcul littéral

**2.1)** On développe :

$$f(x) = (x-3)^2 - 16 = x^2 - 6x + 9 - 16 = x^2 - 6x - 7.$$

**2.2)** Pour factoriser, on utilise la troisième identité remarquable :

$$f(x) = (x-3)^2 - 16 = (x-3)^2 - 4^2 = (x-3-4) \times (x-3+4) = (x-7) \times (x+1).$$

**2.3)** Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, il y a trois méthodes : on peut partir de la forme développée et utiliser le discriminant et les formules de résolution. C'est long, donc on va se concentrer sur les deux autres méthodes.

On peut partir de la forme factorisée et utiliser le théorème du produit nul (qui n'était pas au programme du devoir, officiellement). On a

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-7) \times (x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x-7=0 \\ x=7 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} x+1=0 \\ x=-1 \end{array}.$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \{-1\,;\,7\}$.

Autre méthode : on part de l'expression initiale (dans laquelle l'inconnue $x$ n'apparaît qu'une seule fois) et on remonte les calculs à l'envers :

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 = \pm 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 4 + 3.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-1\,;\,7\}$ (on retrouve évidemment le même).

## Exercice III — Suite logique

**3.1)** Pour identifier le mécanisme, on regarde combien on ajoute pour passer d'un terme au suivant.

$$-5 \xrightarrow{+4} -1 \xrightarrow{+6} 5 \xrightarrow{+8} 13 \xrightarrow{+10} 23.$$

Les termes suivants sont donc

$$23 \xrightarrow{+12} 35 \xrightarrow{+14} 49 \xrightarrow{+16} 65.$$

**3.2)** On a la formule qui donne le coefficient directeur

$$m = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{6 - 4}{1} = 2$$

et on en déduit $p = f(1) - m \times 1 = 4 - 2 = 2$. Donc $f(x) = 2x + 2$.

**3.3)** Pour calculer une somme arithmétique, on l'ajoute à elle-même, écrite à l'envers :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 4 & + & 6 & + & 8 & + & 10 & + & \dots & + & 202 \\ 202 & + & 200 & + & 198 & + & 196 & + & \dots & + & 4 \end{array}$$

et (c'est le principe) si on ajoute par colonne par colonne, on trouve

$$206 + 206 + 206 + 206 + \cdots + 206.$$

Reste à trouver le nombre de termes : on a $4 = f(1)$, $6 = f(2)$, et disons $202 = f(n)$. C'est-à-dire $202 = 2n + 2 \Leftrightarrow 200 = 2n \Leftrightarrow 100 = n$. La somme est donc $f(1) + f(2) + \cdots + f(100)$, elle contient cent termes. On peut terminer le calcul :

$$206 + 206 + 206 + 206 + \cdots + 206 = 100 \times 206 = 20\,600.$$

La somme cherchée vaut la moitié de ceci (puisqu'on l'avait ajoutée à elle-même), c'est-à-dire $10\,300$.

**3.4)** Le mécanisme identifié dans la première question peut s'écrire $u_{n+1} = u_n + f(n)$. Pour passer de $u_1$ à $u_{101}$, on ajoute successivement $f(1) = 4$, puis $f(2) = 6$, puis $f(3) = 8$, puis etc., jusqu'à $f(100) = 202$, soit au total $10\,300$ d'après le calcul de la question précédente. Donc

$$u_{101} = u_1 + f(1) + f(2) + \cdots + f(100) = u_1 + 10\,300 = -5 + 10\,300 = 10\,295.$$

## Exercice IV — Fonction du deuxième degré

**4.1)** On a $f(0) = 2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1$ et $f(1) = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0$.

**4.2)** On a

$$f(1/3) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \times \frac{1}{3} + 1 = 2 \times \frac{1}{9} - 1 + 1 = \frac{2}{9}.$$

**4.3)** La fonction $f$ est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$. D'après les formules du cours, on a $\alpha = -b/(2a) = -(-3)/(2 \times 2) = 3/4$ et

$$\beta = f(\alpha) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{4} + 1 = 2 \times \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{9 - 18 + 8}{8} = -\frac{1}{8}.$$

**4.4)** Pour résoudre l'équation $f(x) = 2/9$, on a deux méthodes. La première consiste à utiliser les formules du cours. On a

$$f(x) = 2/9 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x + 1 = \frac{2}{9} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 3x + \frac{7}{9} = 0,$$

qui est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 2$, $b = -3$ et $c = 7/9$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 7/9 = 9 - 56/9 = 25/9$. Il y a donc deux solutions, données par

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{25/9}}{2 \times 2} = \frac{3 - 5/3}{4} = \frac{9 - 5}{12} = \frac{1}{3}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{25/9}}{2 \times 2} = \frac{3 + 5/3}{4} = \frac{9 + 5}{12} = \frac{7}{6}.$$

L'autre méthode consiste à remarquer qu'on connaît déjà une solution $x_1 = 1/3$ (puisqu'on a trouvé $f(1/3) = 2/9$). L'équation est du deuxième degré, elle a donc zéro (c'est exclu), une (exclu aussi, car $x_1 \neq \alpha$) ou deux solutions. Appelons $x_2$ la seconde : elle se situe (d'après les propriétés de la parabole) à la position symétrique de $x_1$ par rapport à $\alpha$, c'est-à-dire $(x_1 + x_2)/2 = \alpha \Leftrightarrow x_2 = 2\alpha - x_1$. On obtient (à nouveau)

$$x_2 = 2 \times 3/4 - 1/3 = 3/2 - 1/3 = 9/6 - 2/6 = 7/6.$$