DM n°3 : ÉQUATIONS

Exercice 1

a) $2x + 3 = 4x + 19$ $\quad$ $-2x$ $\quad$ -19

$\Leftrightarrow -16 = 2x$ $\quad$ $\div 2$

$\Leftrightarrow \boxed{-8 = x}$

b) $x + 5 = 3 - 2x$ $\quad$ $+2x$ $\quad$ -5

$3x = -2$ $\quad$ $\div 3$

$\boxed{x = -2/3}$

c) $4x + 7 = 7x - 11$ $\quad$ $-4x$ $\quad$ $+11$

$\Leftrightarrow 18 = 3x$ $\quad$ $\div 3$

$\Leftrightarrow \boxed{6 = x}$

d) $3 \times (2 - 3x) = 4 \times (x + 5)$ $\quad$ on développe

$\Leftrightarrow 6 - 9x = 4x + 20$ $\quad$ -20 $\quad$ $+9x$

$\Leftrightarrow -14 = 13x$ $\quad$ $\div 13$

$\Leftrightarrow \boxed{-\frac{14}{13} = x}$

Exercice 2

a) $\dfrac{x - 5}{2} = 3x + 2$ $\quad$ $\times 2$

$\Leftrightarrow x - 5 = 6x + 4$ $\quad$ $-x$ $\quad$ -4

$\Leftrightarrow -9 = 5x$ $\quad$ $\div 5$

$\Leftrightarrow \boxed{-9/5 = x}$

b) $2x + 10 = \dfrac{12 - 5x}{3}$

$\Leftrightarrow 6x + 30 = 12 - 5x$

$\Leftrightarrow 11x = -18$

$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{18}{11}}$

c) $\dfrac{2 - 5x}{8} = \dfrac{5x - 2}{3}$ $\quad$ $\times 8$ $\quad$ $\times 3$

$\Leftrightarrow 6 - 15x = 40x - 16$ $\quad$ $+16$ $\quad$ $+15x$

$\Leftrightarrow 22 = 55x$ $\quad$ $\div 55$

$\Leftrightarrow 22/55 = x$ $\quad$ simplification par 11

$\Leftrightarrow \boxed{2/5 = x}$

d) $\dfrac{3x}{4} = \dfrac{10 - 3x}{5}$ $\quad$ $\times 4$ $\quad$ $\times 5$

$\Leftrightarrow 15x = 40 - 12x$ $\quad$ $+12x$

$\Leftrightarrow 27x = 40$ $\quad$ $\div 27$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{40}{27}}$

Exercice 3

a) $\frac{5}{2}x + 3 = 2x + \frac{3}{2}$

$\times 2$

$\Leftrightarrow 5x + 6 = 4x + 3$

$-4x$ -6

$\Leftrightarrow \boxed{x = -3}$

b) $2x + \frac{10}{3} = \frac{1}{4}x + 3$

$\times 12$

$\Leftrightarrow 24x + 40 = 3x + 36$

$-3x$ -40

$\Leftrightarrow 21x = -4$

$\div 21$

$\Leftrightarrow \boxed{x = -4/21}$

c) $\frac{1-2x}{8} = \frac{1}{4}x + 3$

$\times 8$

$\Leftrightarrow 1 - 2x = 2x + 24$

$+2x$ -24

$\Leftrightarrow -23 = 4x$

$\div 4$

$\Leftrightarrow \boxed{-23/4 = x}$

d) $\frac{5}{3}x + 1 = x + \frac{5}{6}$

$\times 6$

$\Leftrightarrow 10x + 6 = 6x + 5$

$-6x$ -6

$\Leftrightarrow 4x = -1$

$\div 4$

$\Leftrightarrow \boxed{x = -1/4}$

Exercice 4

a) $x^2 = 7x$

$-7x$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0$

on factorise

$\Leftrightarrow x \times (x-7) = 0$

th. du produit nul

$\Leftrightarrow \boxed{x = 0}$ ou $x - 7 = 0$

$\boxed{x = 7}$

b) $3 - 4x^2 = 0$

$+4x^2$

$\Leftrightarrow 3 = 4x^2$

$\div 4$

$\Leftrightarrow 3/4 = x^2$

$\sqrt{.}$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{3}{4}}}$ ou $\boxed{x = -\sqrt{\frac{3}{4}}}$

c) $2x^2 + 9 = 1$

-9

$\Leftrightarrow 2x^2 = -8$

$\div 2$

$\Leftrightarrow x^2 = -4$

Il n'y a pas de solution.

d) $9 - 2x^2 = 3$

-3 $+2x^2$

$\Leftrightarrow 6 = 2x^2$

$\div 2$

$\Leftrightarrow 3 = x^2$

$\sqrt{.}$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{3}}$ ou $\boxed{x = -\sqrt{3}}$

Exercice 5

a) $(x+1)^2 = 4$

$\sqrt{\ }$

$\iff x+1 = 2$ ou $x+1 = -2$

-1 $\boxed{x = 1}$ -1 $\boxed{x = -3}$

b) $2 \times (x-3)^2 = 10$

$\div 2$

$\iff (x-3)^2 = 5$

$\sqrt{\ }$

$\iff x - 3 = \sqrt{5}$ ou $x - 3 = -\sqrt{5}$

$+3$ $\boxed{x = 3+\sqrt{5}}$ $+3$ $\boxed{x = 3-\sqrt{5}}$

c) $(2x+1)^2 = 8$

$\sqrt{\ }$

$\iff 2x+1 = \sqrt{8}$ ou $2x+1 = -\sqrt{8}$

-1 $2x = \sqrt{8} - 1$ -1 $2x = -\sqrt{8} - 1$

$\div 2$ $\boxed{x = \dfrac{\sqrt{8}-1}{2}}$ $\div 2$ $\boxed{x = \dfrac{-\sqrt{8}-1}{2}}$

d) $4 \times (2x-1)^2 = 9$

$\div 4$

$\iff (2x-1)^2 = 9/4$

$\sqrt{\ }$

$\iff 2x-1 = 3/2$ ou $2x-1 = -3/2$

$+1$ $2x = 5/2$ $+1$ $2x = -1/2$

$\div 2$ $\boxed{x = 5/4}$ $\div 2$ $\boxed{x = -1/4}$

Exercice 6

a) $(x+3) \times (2x+3) = 0$

th. du produit nul

$\iff x+3 = 0$ ou $2x+3 = 0$

-3 $\boxed{x = -3}$ -3 $2x = -3$

$\div 2$ $\boxed{x = -3/2}$

b) $(x-4) \times (1-4x) = 0$

th. du produit nul

$\iff x-4 = 0$ ou $1-4x = 0$

$+4$ $\boxed{x = 4}$ $+4x$ $1 = 4x$

$\div 4$ $\boxed{1/4 = x}$

c) $(2x+1) \times (x^2-3) = 0$

th. du produit nul

$\iff 2x+1 = 0$ ou $x^2 - 3 = 0$

-1 $2x = -1$ $+3$ $x^2 = 3$

$\div 2$ $\boxed{x = -1/2}$ $\sqrt{\ }$ $\boxed{x = 3}$ ou $\boxed{x = -3}$

d) $(2x+3)^2 \times (x-4) = 0$

th. du produit nul

$\iff 2x+3 = 0$ ou $x-4 = 0$

-3 $2x = -3$ $+4$ $\boxed{x = 4}$

$\div 2$ $\boxed{x = -3/2}$

Exercice 7

a) $(x+1) \times (x+2) \times (x+3) = 0$

th. du produit nul

$\iff x+1 = 0$ ou $x+2 = 0$ ou $x+3 = 0$

-1 $\boxed{x = -1}$ -2 $\boxed{x = -2}$ -3 $\boxed{x = -3}$

b) $(2x+1)\times(1-2x)\times(2x+5)=0$

théorème du produit nul

$\Leftrightarrow 2x+1=0$ ou $1-2x=0$ ou $2x+5=0$

$2x=-1$ (−1) ; $1=2x$ (+2x) ; $2x=-5$ (−5)

$\boxed{x=-1/2}$ (÷2) ; $\boxed{1/2=x}$ (÷2) ; $\boxed{x=-5/2}$ (÷2)

c) $(2x+4)\times(x+1)^3=0$

th. du produit nul

$\Leftrightarrow 2x+4=0$ ou $x+1=0$

$2x=-4$ (−4) ; $\boxed{x=-1}$ (−1)

$\boxed{x=-2}$ (÷2)

d) $(x+3)\times(2x-5)=(x+1)\times(x+3)$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x+3)}\times(2x-5)-\underbrace{(x+3)}\times(x+1)=0$

factorisation

$\Leftrightarrow (x+3)\times[2x-5-x-1]=0$

facteur commun

$\Leftrightarrow (x+3)\times(x-6)=0$

th. du produit nul

$\Leftrightarrow x+3=0$ ou $x-6=0$

$\boxed{x=-3}$ (−3) ; $\boxed{x=6}$ (+6)

Exercice 8

a) $x^2+4x+4=0$

1ère identité remarquable

$\Leftrightarrow (x+2)^2=0$

$\Leftrightarrow x+2=0$

$\Leftrightarrow \boxed{x=-2}$ (−2)

b) $3-5x-2x^2=0$

Deuxième degré : $\begin{cases} a=-2 \\ b=-5 \\ c=3 \end{cases}$ $\begin{aligned} \Delta &= b^2-4ac \\ &= (-5)^2-4\times(-2)\times 3 \\ &= 49 \end{aligned}$

Il y a deux solutions, car $\Delta>0$:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)-\sqrt{49}}{2\times(-2)}=\frac{5-7}{-4}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times(-2)}=\frac{5+7}{-4}=\boxed{-3}$$

c) $x^2+3x=10$

$\Leftrightarrow x^2+3x-10=0$ (−10)

Deuxième degré : $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=-10 \end{cases}$ $\begin{aligned} \Delta &= b^2-4ac \\ &= 3^2-4\times1\times(-10) \\ &= 49 \end{aligned}$

Il y a deux solutions, car $\Delta>0$:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{49}}{2\times1}=\boxed{-5}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{49}}{2\times1}=\boxed{2}$$

d) $(2x-1)^2=1$

$\sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow 2x-1=1$ ou $2x-1=-1$

$2x=2$ (+1) ; $2x=0$ (+1)

$\boxed{x=1}$ (÷2) ; $\boxed{x=0}$ (÷2)

Exercice 9

a) $\dfrac{x+3}{2x+1} = 0$ L'équation a du sens lorsque $2x+1 \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq -1/2$.

Sous cette réserve on a

produit en croix

$$\frac{x+3}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow x+3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -3 \quad (-3)$$

Ce n'est pas une valeur interdite donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-3\}}.$$

b) $\dfrac{x-7}{3-2x} = 4$ L'équation a du sens lorsque $3-2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3/2$.

Sous cette réserve on a

produit en croix

$$\frac{x-7}{3-2x} = 4 \Leftrightarrow x-7 = 12-8x \quad (+8x)$$
$$\Leftrightarrow 9x = 19 \quad (+7)$$
$$\Leftrightarrow x = 19/9 \quad (\div 9)$$

Ce n'est pas une valeur interdite donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{19/9\}}.$$

c) $\dfrac{8}{x+9} = x+1$ L'équation a du sens lorsque $x+9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -9$.

Sous cette réserve on a

produit en croix

$$\frac{8}{x+9} = x+1 \Leftrightarrow 8 = x^2 + x + 9x + 9 \quad (-8)$$
$$\Leftrightarrow 0 = x^2 + 10x + 1.$$

Deuxième degré : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 10 \\ c = 1 \end{cases}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times 1 = 96.$

Il y a deux solutions, puisque $\Delta > 0$:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10-\sqrt{96}}{2\times1} = -5-\sqrt{24}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10+\sqrt{96}}{2\times1} = -5+\sqrt{24}.$$

Ce ne sont pas des valeurs interdites, donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-5-\sqrt{24} \,;\, -5+\sqrt{24}\}}$$

$$\left(\sqrt{96} = \sqrt{4 \times 24} = \sqrt{4} \times \sqrt{24} = 2 \times \sqrt{24}\right)$$

d) $\dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{2}{3x+4}$

L'équation a du sens lorsque $2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1/2$
et $3x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4/3$.

Sous cette réserve on a

$$\frac{1}{2x+1} = \frac{2}{3x+4}$$

produit en croix

$$\Leftrightarrow 3x+4 = 4x+2 \quad (-3x)$$
$$\Leftrightarrow 2 = x \quad (-2)$$

Ce n'est pas une valeur interdite donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{2\}}.$$

Exercice 10

a) $\dfrac{1-3x}{x+3} = \dfrac{x+5}{1-2x}$ L'équation a du sens lorsque $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ et $1-2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Sous ces deux réserves on a

$$\frac{1-3x}{x+3} = \frac{x+5}{1-2x} \overset{\text{produit en croix}}{\Longleftrightarrow} (1-3x)\times(1-2x) = (x+3)\times(x+5)$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 = x^2 + 8x + 15$$

$-x^2$ $-8x$ -15

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 13x - 14 = 0$$

Deuxième degré : $\begin{cases} a = 5 \\ b = -13 \\ c = -14 \end{cases}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4\times 5\times(-14) = 449$

Il y a deux solutions, puisque $\Delta > 0$:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)-\sqrt{449}}{2\times 5} = \frac{13-\sqrt{449}}{10}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)+\sqrt{449}}{2\times 5} = \frac{13+\sqrt{449}}{10}$$

Ce ne sont pas des valeurs interdites, donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{13-\sqrt{449}}{10} ; \frac{13+\sqrt{449}}{10}\right\}}$

b) $\dfrac{x^3}{x^2+x+1} = x - 3$. L'équation a du sens lorsque $x^2+x+1 \neq 0$; c'est un trinôme avec $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = -3 < 0$ donc il ne s'annule pas.

Donc : $\dfrac{x^3}{x^2+x+1} = x - 3 \overset{\text{produit en croix}}{\Longleftrightarrow} x^3 = (x-3)\times(x^2+x+1)$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^3} = \cancel{x^3} - 3x^2 + x^2 - 3x + x - 3$$

Second degré avec $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 0 = -2x^2 - 2x - 3$$

$-$

$$\Leftrightarrow 0 = 2x^2 + 2x + 3.$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times 2\times 3 = -20$

Donc <u>il n'y a pas de solution</u> (puisque $\Delta < 0$).

c) $\dfrac{x^2}{x+5} = \dfrac{x^2+1}{x+6}$ L'équation a du sens lorsque $x+5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$ et $x+6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -6$.

Sous ces deux réserves on a

produit en croix

$$\frac{x^2}{x+5} = \frac{x^2+1}{x+6} \Leftrightarrow x^2 \times (x+6) = (x+5) \times (x^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^3} + 6x^2 = \cancel{x^3} + 5x^2 + x + 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 5 = 0$$

Deuxième degré avec $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-5 \end{cases}$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 21$

donc il y a deux solutions (puisque $\Delta > 0$) :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{1+\sqrt{21}}{2}.$$

Ce ne sont pas des valeurs interdites, donc $\boxed{S = \left\{\frac{1-\sqrt{21}}{2} ; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right\}}$.

d) $(x+2) \times (2x^2 - 3x - 5) = (2x+9) \times (x^2 - x - 1)$

$$\Leftrightarrow \cancel{2x^3} + 4x^2 - 3x^2 \cancel{- 6x - 5x} - 10 = \cancel{2x^3} + 9x^2 - 2x^2 \cancel{- 9x - 2x} - 9$$

$$\Leftrightarrow 0 = 6x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -1/6 = x^2$$ -1 $\div 6$

Il n'y a pas de solution.