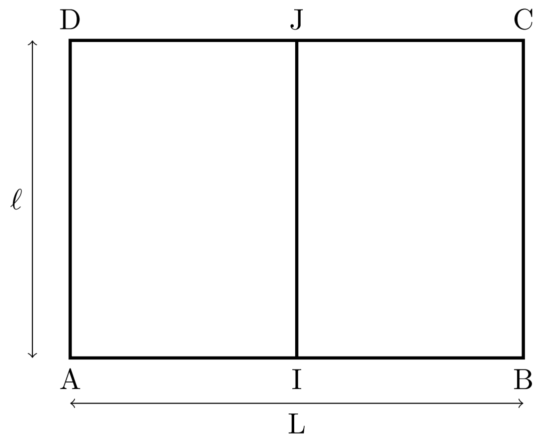
DEUX RAPPORTS CÉLÈBRES

Problème, 65 minutes

Partie I — Du papier

On considère un rectangle ABCD, qu'on « coupe en deux » : on place les milieux respectifs I et J de [AB] et [DC], ce qui fait deux rectangles plus petits AIJD et IBCJ. Enfin, on note $\mathrm{L} = \mathrm{AB}$ et $\ell = \mathrm{AD}$ les dimensions du rectangle initial.



QUESTION 1.1 — *Le rapport « longueur sur largeur » de* ABCD *est* L/ℓ. *Exprimer en fonction de* L *et* ℓ *le rapport « longueur sur largeur » du rectangle* AIJD.

QUESTION 1.2 — *On suppose que* ABCD *et* AIJD *ont les mêmes proportions. Démontrer que* $\mathrm{L}/\ell = \sqrt{2}$.

Le format standard de papier est défini ainsi : on part d'une feuille, dite A_0, d'aire $1\,\mathrm{m}^2$. Ses dimensions sont choisies de sorte que lorsqu'on la coupe en deux, on obtient deux feuilles ayant les mêmes proporitions que la feuille de départ. Ces deux « moitiés » constituent le format A_1. Puisqu'elles ont les mêmes proporitions que la feuille de départ, lorsqu'on les coupe à leur tour en deux, on obtient des feuilles ayant toujours les mêmes proportions, et qui constituent le format A_2. On continue ainsi de suite, pour obtenir les formats A_3, puis A_4.

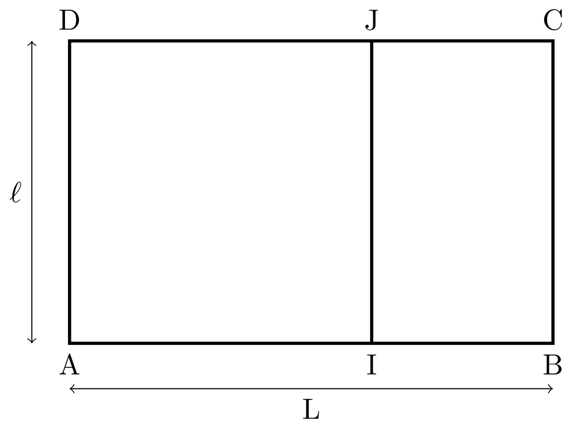
QUESTION 1.3 — *Expliquer l'intérêt de conserver les mêmes proportions à chaque découpe. On pourra penser à la situation suivante : imprimer deux exemplaires par feuille d'un document, en demi-format.*

QUESTION 1.4 — *Combien y a-t-il de feuilles* A_4 *dans une feuille* A_0 *? En déduire l'aire théorique d'une feuille* A_4.

QUESTION 1.5 — *En utilisant* $\mathrm{L}/\ell = \sqrt{2}$, *déterminer les dimensions théoriques, en millimètres, d'une feuille* A_4.

Partie II — Le nombre d'or

On considère un rectangle ABCD, dans lequel on découpe un carré : on place les points I et J, respectivement sur [AB] et sur [DC], de sorte que AIJD soit un carré. On note toujours $\mathrm{L} = \mathrm{AB}$ et $\ell = \mathrm{AD}$ les dimensions du rectangle initial.



QUESTION 2.1 — *Exprimer en fonction de* L *et* ℓ *le rapport « longueur sur largeur » du rectangle* IBCJ.

QUESTION 2.2 — *On suppose que* ABCD *et* IBCJ *ont les mêmes proportions. Démontrer que*

$$\left(\frac{\mathrm{L}}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{L}}{\ell}\right) - 1 = 0.$$

QUESTION 2.3 — *Résoudre l'équation* $x^2 - x - 1 = 0$ *et en déduire la valeur du rapport* L/ℓ.

On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par les deux premiers termes $\mathrm{F}_0 = 0$ et $\mathrm{F}_1 = 1$, puis par la relation de récurrence $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ (autrement dit, chaque nouveau terme est la somme des deux précédents).

QUESTION 2.4 — *Expliciter les termes jusqu'à* F_{10}. *On ne détaillera évidemment pas les calculs.*

QUESTION 2.5 — *Écrire un programme* `Rapport(n)` *qui, pour* $n \geqslant 1$, *calcule la valeur de* $\mathrm{F}_{n+1}/\mathrm{F}_n$.

Voici les résultats qu'on obtient pour $n = 10$, $n = 20$ et $n = 30$.

```
>>> Rapport(10)
1.6181818181818182
>>> Rapport(20)
1.6180339985218033
>>> Rapport(30)
1.6180339887505408
```

QUESTION 2.6 — *Commenter.*

FIN

Partie I — Du papier

1.1) Dans le rectangle AIJD, la longueur (le plus grand côté) est $\mathrm{AD} = \ell$ et la largeur est $\mathrm{L}/2$ (puisque I est le milieu de [AB]). Le rapport est donc

$$\frac{\ell}{\mathrm{L}/2} = 2 \times \frac{\ell}{\mathrm{L}}.$$

1.2) Si on suppose que le rapport calculé ci-dessus est égal à L/ℓ, alors on a

$$2 \times \frac{\ell}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{L}}{\ell} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \left(\frac{\mathrm{L}}{\ell}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{2} = \frac{\mathrm{L}}{\ell}.$$

Puisqu'il s'agit d'un rapport de longueurs, c'est une quantité positive (ce qui exclut la solution négative), et finalement $\mathrm{L}/\ell = \sqrt{2}$.

1.3) Si l'on cherche à réduire la taille d'un document (par exemple pour en imprimer plusieurs exemplaires par feuille), et que la « petite » version n'a pas les mêmes proportions que l'original, alors ce qui figure dessus sera déformé : allongé dans le sens de la hauteur si le rapport L/ℓ a augmenté, ou étiré dans le sens de la largeur si le rapport L/ℓ a diminué. Ce n'est évidemment pas satisfaisant !

1.4) On divise quatre fois de suite la feuille A_0 en deux pour obtenir le format A_4, autrement dit on divise par $2^4 = 16$. L'aire de la feuille A_4 est donc théoriquement

$$\frac{1\,\mathrm{m}^2}{16} = 0{,}062\,5\,\mathrm{m}^2 = 62\,500\,\mathrm{mm}^2.$$

1.5) Soient L et ℓ les dimensions d'une feuille A_4. On a calculé précédemment $\mathrm{L} \times \ell = 62\,500\,\mathrm{mm}^2$. Comme de plus $\mathrm{L} = \sqrt{2} \times \ell$, on en déduit que

$$(\sqrt{2} \times \ell) \times \ell = 62\,500\,\mathrm{mm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} \times \ell^2 = 62\,500\,\mathrm{mm}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \sqrt{\frac{62\,500\,\mathrm{mm}^2}{\sqrt{2}}} \simeq 210{,}224\,\mathrm{mm}.$$

Puis (par exemple, il y a plusieurs méthodes possibles) :

$$\mathrm{L} = \frac{62\,500\,\mathrm{mm}^2}{\ell} \simeq \frac{62\,500\,\mathrm{mm}^2}{210{,}224\,\mathrm{mm}} \simeq 297{,}302\,\mathrm{mm}.$$

Voilà pour les dimensions théoriques. Remarque culturelle : en réalité, les dimensions officielles sont arrondies au millimètre : donc une feuille A_4 mesure *exactement* $297\,\mathrm{mm} \times 210\,\mathrm{mm}$. En particulier, son aire est légèrement inférieure à l'aire théorique.

Partie II — Le nombre d'or

2.1) La longueur (le plus grand côté) est $\mathrm{BC} = \ell$, et la largeur est $\mathrm{IB} = \mathrm{L} - \ell$. Le rapport est donc

$$\frac{\ell}{\mathrm{L} - \ell}.$$

2.2) Si on suppose que ce rapport est égal à L/ℓ, on obtient (produit en croix !)

$$\frac{\mathrm{L}}{\ell} = \frac{\ell}{\mathrm{L} - \ell} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L} \times (\mathrm{L} - \ell) = \ell \times \ell \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{L}^2 - \mathrm{L} \times \ell - \ell^2 = 0,$$

puis, en divisant tout par ℓ^2, on obtient finalement

$$\frac{\mathrm{L}^2}{\ell^2} - \frac{\mathrm{L}\times\ell}{\ell^2} - \frac{\ell^2}{\ell^2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\mathrm{L}}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{L}}{\ell}\right) - 1 = 0.$$

2.3) L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = -1$. Son discriminant vaut

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5,$$

il est strictement positif, et l'équation possède donc deux solutions

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0{,}618\,033\,988\,749\,895$$

et

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618\,033\,988\,749\,895.$$

Le rapport L/ℓ (qui vérifie l'équation $x^2 - x - 1 = 0$) est une quantité positive, ce qui exclut la solution x_1. On en déduit qu'il vaut

$$\frac{\mathrm{L}}{\ell} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Cette quantité s'appelle *le nombre d'or*.

2.4) Les premiers termes de la suite de Fibonacci sont

$$\mathrm{F}_0 = 0 \quad \mathrm{F}_1 = 1 \quad \mathrm{F}_2 = 1 \quad \mathrm{F}_3 = 2 \quad \mathrm{F}_4 = 3 \quad \mathrm{F}_5 = 5 \quad \mathrm{F}_6 = 8 \quad \mathrm{F}_7 = 13 \quad \mathrm{F}_8 = 21 \quad \mathrm{F}_9 = 34 \quad \mathrm{F}_{10} = 55\ldots$$

2.5) Dans le programme ci-dessous, on utilise deux variables a et b qui représentent deux termes *consécutifs* de la suite de Fibonacci. On les initialise avec F_0 et F_1 respectivement. Si à un certaine étape elles ont les valeurs $a = \mathrm{F}_k$ et $b = \mathrm{F}_{k+1}$, pour passer à l'étape suivante, il faut donner (simultanément) à a la valeur de $b = \mathrm{F}_{k+1}$, et à b la valeur de $a + b = \mathrm{F}_k + \mathrm{F}_{k+1} = \mathrm{F}_{k+2}$. La boucle effectue n itérations, à la sortie on est donc passé de $a = \mathrm{F}_0$ et $b = \mathrm{F}_1$ à $a = \mathrm{F}_{0+n}$ et $b = \mathrm{F}_{1+n}$. C'est ce qu'on veut.

```
def Rapport(n) :
    a = 0 ; b = 1
    for _ in range(n) :
        (a, b) = (b, a + b)
    return b / a
```

2.6) On remarque que le rapport $\mathrm{F}_{n+1}/\mathrm{F}_n$ se rapproche, lorsque n augmente, du nombre d'or $(1+\sqrt{5})/2$. Pourquoi, c'est une autre affaire, on verra peut-être un autre jour.