IDENTITÉ REMARQUABLE DE BRAHMAGUPTA

Problème, 75 minutes

On étudie dans ce problème un algorithme imaginé par le mathématicien (et astronome) indien Brahmagupta, dans la première moitié du septième siècle, pour calculer les racines carrées.

Partie I — Quésaco ?

QUESTION 1.1 — *Démontrer que pour tous nombres a, b, c, d et n on a*

$$(a^2 - nb^2) \times (c^2 - nd^2) = (ac + nbd)^2 - n \times (ad + bc)^2.$$

Partie II — Approximation des racines carrées

QUESTION 2.1 — *Soient* A *et* B *deux nombres strictement positifs, et soit* n *un entier strictement positif. On suppose que* $\mathrm{A}^2 - n\mathrm{B}^2 = 1$. *Prouver que*

$$\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2} = n + \frac{1}{\mathrm{B}^2}.$$

On admet que pour tout nombre $h \geqslant 0$, et tout $x \geqslant 1$, on a

$$\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x+h} \leqslant \sqrt{x} + \frac{h}{2}.$$

L'inégalité de gauche est évidente, et on démontrera l'inégalité de droite plus tard, dans le chapitre sur la dérivation.

QUESTION 2.2 — *On reprend les notations de* **2.1**. *Démontrer que la fraction* A/B *est une valeur approchée à* $1/(2\mathrm{B}^2)$ *près de* $\sqrt{n}$, *c'est-à-dire qu'on a*

$$\sqrt{n} - \frac{1}{2\mathrm{B}^2} \leqslant \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \leqslant \sqrt{n} + \frac{1}{2\mathrm{B}^2}.$$

QUESTION 2.3 — *Soit* K *un entier strictement positif. On suppose que* $\mathrm{B}^2 \geqslant 10^{\mathrm{K}}$. *Combien de chiffres après la virgule « justes » donne la fraction* A/B *si l'on s'en sert pour calculer* $\sqrt{n}$ *?*

Avant de passer à la suite, on donne le mystérieux programme suivant, qui affiche la valeur de la fraction A/B tronquée à K chiffres après la virgule.

```python
def DéveloppementDécimal(A, B, K) :
    E = str(A // B)
    F = str(10 ** K * (A % B) // B)
    print(E + "." + "0" * (K - len(F)) + F)
```

Testons avec la fraction 1 572 584 048 032 918 633 353 217/1 111 984 844 349 868 137 938 112.

```python
>>> A = 1572584048032918633353217 ; B = 1111984844349868137938112
>>> DéveloppementDécimal(A, B, 50)
1.41421356237309504880168872420969807856967187537723
```

Partie III — Exemple avec $\sqrt{3}$

On a $2^2 - 3 \times 1^2 = 1$, et en appliquant l'identité de Brahmagupta à $n = 3$, $a = c = 2$ et $b = d = 1$, on obtient

$$(2^2 - 3 \times 1^2) \times (2^2 - 3 \times 1^2) = 7^2 - 3 \times 4^2.$$

Et puisque $1 \times 1 = 1$, cette nouvelle quantité est toujours égale à 1. On peut donc recommencer avec $a = c = 7$ et $b = d = 4$ (et bien sûr toujours $n = 3$) : on obtient maintenant

$$(7^2 - 3 \times 4^2) \times (7^2 - 3 \times 4^2) = 97^2 - 3 \times 56^2.$$

Et comme $1 \times 1 = 1$ (ça ça n'a pas changé) cette dernière quantité est toujours égale à 1. On peut donc continuer indéfiniment. Nous appellerons le passage du couple $(2, 1)$ au couple $(7, 4)$ une *itération de Brahmagupta*. L'itération suivante est donc le passage de $(7, 4)$ à $(97, 56)$.

QUESTION 3.1 — *Quel est le résultat de l'itération suivante ? Et celui de celle d'après ? Les nombres deviennent rapidement grands, pas de panique, c'est normal.*

QUESTION 3.2 — *On fixe trois entiers strictement positifs* A, B *et* n *tels que* $\mathrm{A}^2 - n \times \mathrm{B}^2 = 1$. *On applique l'identité de Brahmagupta avec* $a = c = \mathrm{A}$ *et* $b = d = \mathrm{B}$, *cela donne l'itération* $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto (\mathrm{A}', \mathrm{B}')$. *Donner la formule générale pour calculer* A' *et* B' *à partir de* n, A *et* B.

QUESTION 3.3 — *Écrire le programme* `Itération(n, A, B)` *qui calcule et renvoie le couple* `(A', B')`.

```
>>> Itération(3, 7, 4)
(97, 56)
```

QUESTION 3.4 — *En déduire un programme* `RacineDeTrois(K)` *qui affiche une valeur approchée avec* K *chiffres après la virgule de* $\sqrt{3}$.

```
>>> RacineDeTrois(100)
1.732050807568877293527446341505872366942805253810380628055806979451933016
  9088000370811461867572485756
```

Partie IV — D'autres racines

Pour calculer $\sqrt{n}$ avec l'algorithme de Brahmagupta, le point de départ est de trouver deux entiers A et B tels que $\mathrm{A}^2 - n \times \mathrm{B}^2 = 1$. On ne va pas chercher à résoudre ce problème, et on va partir à l'envers : plutôt que de choisir n, on va choisir A et trouver les $\sqrt{n}$ qu'il permet de calculer.

QUESTION 4.1 — *On fixe* $\mathrm{A} \in \mathbf{N}^*$. *Soit* B *un entier strictement positif. Montrer que* B^2 *est un diviseur de* $\mathrm{A}^2 - 1$ *si et seulement s'il existe un entier* n *tel que* $\mathrm{A}^2 - n \times \mathrm{B}^2 = 1$.

QUESTION 4.2 — *En déduire un programme* `Possibles(A)` *qui étant donné* A *affiche tous les couples* (n, B) *tels que* $\mathrm{A}^2 - n \times \mathrm{B}^2 = 1$.

```
>>> Possibles(9)
n = 80 ; B = 1
n = 20 ; B = 2
n = 5 ; B = 4
```

Dans l'exemple ci-dessus, on voit qu'on peut calculer $\sqrt{5}$ en partant de $9^2 - 5 \times 4^2 = 1$.

QUESTION 4.3 — *Comment a été obtenue la grande fraction de la deuxième partie ? De qui donne-t-elle une valeur approchée, et tous les chiffres affichés sont-ils justes ?*

FIN

Partie I — Quésaco ?

1.1) Soient a, b, c, d et n quatre nombres. D'une part on a

$$(a^2 - nb^2) \times (c^2 - nd^2) = a^2c^2 - nb^2c^2 - na^2d^2 + n^2b^2d^2,$$

et d'autre part

$$(ac + nbd)^2 - n \times (ad + bc)^2 = a^2c^2 + 2nabcd + n^2b^2d^2 - na^2d^2 - 2nabcd - nb^2c^2.$$

Après avoir simplifié les termes en $2nabcd$, qui s'éliminent, il reste la même chose, donc les deux expressions sont égales.

Partie II — Approximation des racines carrées

2.1) Soient n, A et B strictement positifs et tels que $\mathrm{A}^2 - n\mathrm{B}^2 = 1$. On a donc $\mathrm{A}^2 = n\mathrm{B}^2 + 1$, puis en divisant par B^2 (qui est non nul) on obtient

$$\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2} = n + \frac{1}{\mathrm{B}^2}.$$

2.2) Toutes les quantités étant positives, on en déduit que

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \sqrt{n + \frac{1}{\mathrm{B}^2}}.$$

En appliquant l'encadrement proposé par l'énoncé à $x = n$ (c'est possible : n est un entier strictement positif, donc il est au moins égal à un) et à $h = 1/\mathrm{B}^2$, on obtient

$$\sqrt{n} \leqslant \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \leqslant \sqrt{n} + \frac{1}{2\mathrm{B}^2}.$$

C'est même plus précis que l'encadrement demandé dans l'énoncé, où l'on a encore retranché $1/(2\mathrm{B}^2)$ au minorant.

2.3) Si $\mathrm{B}^2 \geqslant 10^{\mathrm{K}}$, alors $1/\mathrm{B}^2 \leqslant 10^{-\mathrm{K}}$. L'encadrement précédent montre alors que

$$\sqrt{n} - \frac{1}{2} \times 10^{-\mathrm{K}} \leqslant \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \leqslant \sqrt{n} + \frac{1}{2} \times 10^{-\mathrm{K}},$$

soit encore

$$-\frac{1}{2} \times 10^{-\mathrm{K}} \leqslant \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-\mathrm{K}},$$

avec $10^{-\mathrm{K}} = 0{,}000\,000\ldots01$ (le 1 étant le K-ième chiffre après la virgule), et donc on voit que l'arrondi de $\mathrm{A}/\mathrm{B} - \sqrt{n}$ à K chiffres après la virgule est égal zéro. Donc A/B est une valeur approchée de $\sqrt{n}$ avec K chiffres après la virgule justes.

Partie III — Exemple avec $\sqrt{3}$

3.1) Pour l'itération suivante, on applique l'identité à $a = c = 97$ et $b = d = 56$, ce qui donne

$$(97^2 - 3 \times 56^2) \times (97^2 - 3 \times 56^2) = (97 \times 97 + 3 \times 56 \times 56)^2 - 3 \times (97 \times 56 + 56 \times 97)^2,$$

tout ceci étant bien sûr toujours égal à 1, et en calculant les deux parenthèses du membre de droite on obtient

$$18\,817^2 - 3 \times 10\,864^2 = 1.$$

3.2) La formule générale s'obtient en lisant chaque parenthèse, dans le membre de droite de l'inégalité de Brahmagupta, et en prenant $a = c = \mathrm{A}$ et $b = d = \mathrm{B}$. C'est donc

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}^2 + n \times \mathrm{B}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{B}' = \mathrm{AB} + \mathrm{BA} = 2 \times \mathrm{AB}.$$

Petite remarque : on obtient les mêmes formules (et donc les mêmes valeurs approchées) que pour l'algorithme de Héron, dont on aura l'occasion de parler je ne sais quand.

3.3) Pour le programme, on copie la formule.

```
def Itération(n, A, B) :
    return (A**2 + n * B**2, 2 * A * B)
```

3.4) On réalise plusieurs fois l'itération, à partir du couple $(\mathrm{A}\,;\mathrm{B}) = (2\,;1)$ (c'est-à-dire on le remplace par $(\mathrm{A}'\,;\mathrm{B}')$) jusqu'à avoir $\mathrm{B}^2 \geqslant 10^{\mathrm{K}}$.

```
def RacineDeTrois(K) :
    A = 2 ; B = 1
    while B ** 2 < 10 ** K :
        (A, B) = Itération(3, A, B)
    DéveloppementDécimal(A, B, K)
```

On peut évidemment demander bien plus que cent chiffres après la virgule, mais si j'en mettais davantage dans le sujet, ça ne rentrait plus sur une feuille recto-verso.

Partie IV — D'autres racines

4.1) On a $\mathrm{A}^2 - n\mathrm{B}^2 = 1 \Leftrightarrow \mathrm{A}^2 - 1 = n \times \mathrm{B}^2$, et cette dernière relation signifie que B^2 divise $\mathrm{A}^2 - 1$ (avec n le quotient).

4.2) On peut écrire quelque chose comme ça. On s'efforce de ne pas calculer plusieurs fois la même chose, donc on range les résultats de $\mathrm{A}^2 - 1$ et B^2 dans des variables (ci-dessous a et b respectivement).

```
def Possibles(A) :
    B = 1
    a = A ** 2 - 1 ; b = B ** 2
    while b <= a :
        if a % b == 0 :
            print("n␣=", a // b, ";␣B␣=", B)
        B += 1 ; b = B ** 2
```

4.3) La grande fraction de la deuxième partie est évidemment pour $\sqrt{2}$ (la valeur approchée est plus petite que celle de $\sqrt{3}$ et la seule racine plus petite, à part zéro et un, est $\sqrt{2}$). Là il faut un peut d'imagination pour trouver la relation de départ : on a $3^2 - 2 \times 2^2 = 1$, donc l'algorithme est initialisé avec $\mathrm{A} = 3$ et $\mathrm{B} = 2$. En effectuant les calculs, on voit qu'on a itéré cinq fois.

```
>>> (A, B) = (3, 2)
>>> (A, B) = Itération(2, A, B) ; (A, B)
(17, 12)
>>> (A, B) = Itération(2, A, B) ; (A, B)
(577, 408)
>>> (A, B) = Itération(2, A, B) ; (A, B)
(665857, 470832)
>>> (A, B) = Itération(2, A, B) ; (A, B)
(886731088897, 627013566048)
>>> (A, B) = Itération(2, A, B) ; (A, B)
(1572584048032918633353217, 1111984844349868137938112)
```

Le dernier B ne vérifie pas $B^2 \leqslant 10^{50}$, donc les cinquantes chiffres après la virgule donnés dans le sujet ne sont certainement pas tous justes. En revanche

```
>>> B ** 2 >= 10 ** 49
False
>>> B ** 2 >= 10 ** 48
True
```

donc il y en a au moins 48 de bons. Pour savoir précisément, il faut comparer avec la bonne valeur, donnée par exemple par Wolfram Alpha. On obtient

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,209\,698\,078\,569\,671\,875\,376\,948\ldots$$

si l'on s'arrête au cinquante-et-unième chiffre après la virgule. Il faudrait donc 694 au lieu de 723 à la fin, ce qui (après arrondi) donne bien seulement les deux derniers chiffres faux.