Jour 10

PROBLÈMES D'OPTIMISATIONS GÉOMÉTRIQUES

solutions

Question 1

Soit $\mathrm{L} = x$ et ℓ (qu'on cherche) les deux dimensions du rectangle. Le périmètre est égal à $2 \times (\mathrm{L} + \ell) = 150$, soit $\mathrm{L} + \ell = 75$ (en divisant par deux) et enfin $\ell = 75 - \mathrm{L} = 75 - x$.

Question 2

L'aire est égale à $\mathrm{L} \times \ell = x \times (75 - x) = 75x - x^2$.

Question 3

Bien sûr la fonction de cette question est l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle. Il s'agit d'une fonction polynomiale du deuxième degré, avec une expression de la forme $ax^2 + bx + c$, où $a = -1$, $b = 75$ et $c = 0$. Puisque $a < 0$, les branches de la parabole qui la représente sont tournées vers le haut, et les coordonnées du sommet sont

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{75}{2 \times (-1)} = \frac{75}{2}$$

et

$$\beta = a\alpha^2 + b\alpha + c = -\left(\frac{75}{2}\right)^2 + 75 \times \frac{75}{2} = -\frac{75^2}{4} + \frac{75^2}{2} = \frac{75^2}{4},$$

parce qu'un demi moins un quart, ça fait un quart, qu'il soit question de quarts tout court ou de quarts de 75^2. Voici le tableau des variations.

x	$-\infty$		$75/2$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$75^2/4$	$\searrow$	

Donc pour que son aire soit maximale, il faut que $x = 75/2$. Une subtilité : pour que le problème ait du sens, il faut que x soit entre 0 et 75. Donc on cherche le maximum de la fonction sur cet intervalle, et $75/2$ est bien dedans. Pour un tel x, on a $\ell = 75 - 75/2 = 75/2 = \mathrm{L}$: donc le rectangle, à périmètre fixé, qui a l'aire la plus grande, c'est le carré.

Question 4

Puisque le repère est orthonormé, on a

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (f(x) - 0)^2} = \sqrt{f(x)^2}.$$

Si f est positive (on vérifiera tout à l'heure que c'est bien le cas, pour l'instant disons juste que ça se voit sur la courbe), on obtient $\mathrm{AB} = f(x)$.

De même on a

$$\mathrm{AD} = \sqrt{(x_\mathrm{D} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{D} - y_\mathrm{A})^2} = \sqrt{(x - (-x))^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{x^2} = x,$$

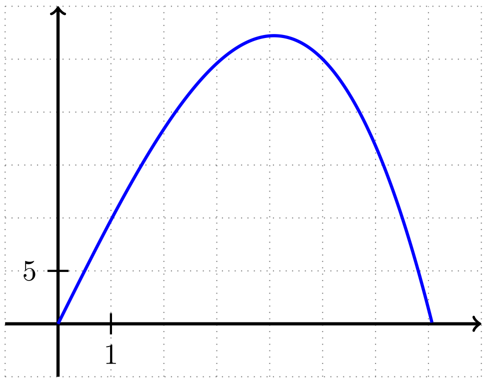
à nouveau puisque x est positif (ça c'est par hypothèse).

Question 5

Et donc
$$\mathscr{A}(x) = \mathrm{AB} \times \mathrm{AD} = f(x) \times 2x = \left(5 - \frac{x^2}{10}\right) \times 2x = 10x - \frac{2x^3}{10} = 10x - \frac{x^3}{5}.$$

Question 6

C'est parti. On peut faire à la main, avec une calculatrice graphique, ou avec l'ordinateur (Python, Geogebra, enfin tout ce qui sait faire une courbe).



C'est pas forcément très facile de lire le maximum (on aura plus tard dans l'année des outils pour le lire/calculer de manière arbitrairement précise, dans le chapitre sur la dérivation). Ici on va dire que c'est légèrement plus que 4 (et très précisément c'est $\simeq 4{,}082\,5$).

Question 7

Vérifions que le $\sqrt{50}$ sert à rester dans la partie de la parabole qui est « au-dessus » de l'axe des abscisses, autrement dit que pour x entre 0 et $\sqrt{50}$, la fonction f est positive.

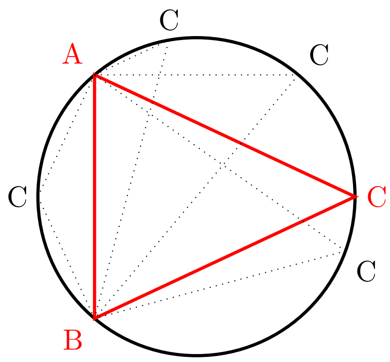
Le plus rapide pour avoir le signe est de remarquer que
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 50 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{50}.$$

La parabole a ses branches tournées vers le bas, donc la fonction est positive sur l'intervalle délimité par les racines, autrement dit elle est positive sur $[-\sqrt{50}\,;\,\sqrt{50}]$.

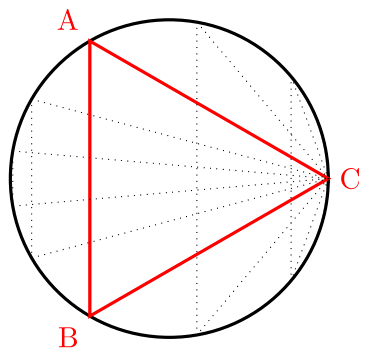
Question 8

Là on monte subitement *d'un cran* dans la difficulté. Première chose qu'on peut dire : le problème est invariant par changement d'échelle, c'est-à-dire le triangle qui a le périmètre maximal pour un rayon de 1 cm a la même forme (en appliquant une homothétie) que celui qui a un périmètre maximal sur un cercle de rayon 10 cm. On peut donc supposer que le rayon vaut 1.

On va procéder en deux temps. Première étape : on va voir que si l'on a placé deux points fixes A et B sur le cercle, alors le périmètre est maximal lorsque C complète ABC en un triangle isocèle (et en plaçant C dans la plus grande partie du cercle)



Deuxième étape : puisqu'on sait qu'il faut chercher parmi les triangles isocèles, on va voir que parmi ceux-là, celui qui donne le périmètre le plus grand est le triangle équilatéral.



Il se trouve que c'est la deuxième étape qui est la moins difficile, donc commençons par elle.