Jour 8

QUELQUES OUTILS DE GÉOMÉTRIE

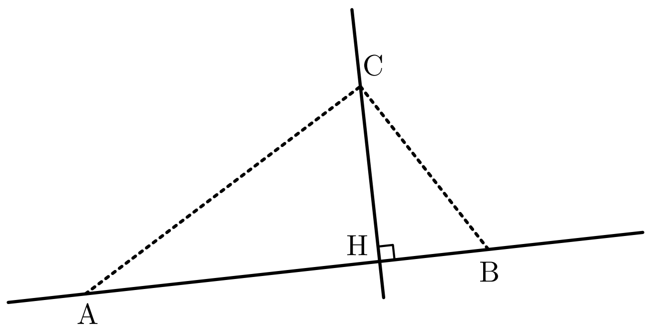
solutions

Question 1

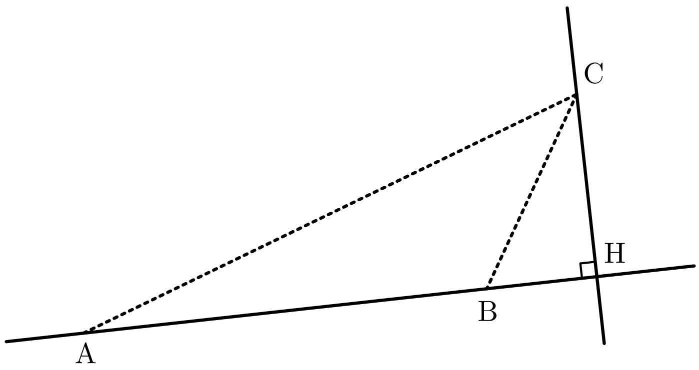
On a AB = 0 puisque A et B sont confondus, et AC et CB étant des distances, elles sont positives : en particulier on est sûr d'avoir $\mathrm{AB} = 0 \leqslant \mathrm{AC} + \mathrm{CB}$. La seule façon d'avoir égalité, c'est que les distances AC et CB soient nulles ; c'est-à-dire que C soit confondu avec A et B.

Question 2

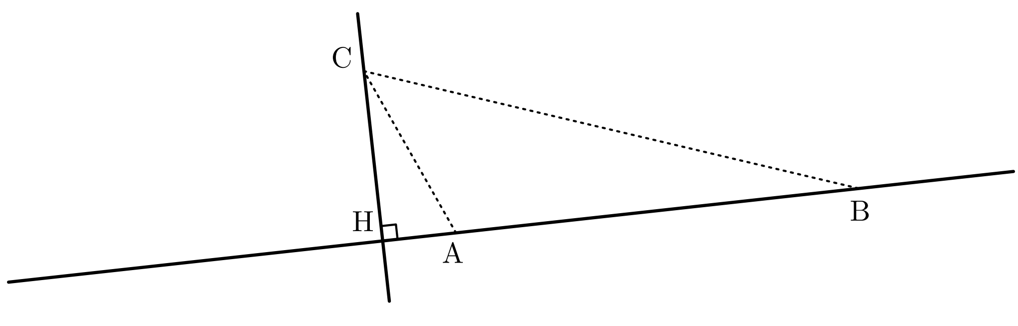
Première situation : A, H et B dans cet ordre.



Deuxième situation : A, B et H dans cet ordre.



Troisième situation : H, A et B dans cet ordre.



Question 3

Puisque H est sur la demi-droite [AB) au-delà de B, on a $\mathrm{AB} < \mathrm{AH}$. En élevant au carré il vient $\mathrm{AB}^2 < \mathrm{AH}^2$, car le carré préserve l'ordre chez les nombres positifs.

Maintenant appliquons le théorème de Pythagore : dans le triangle AHC rectangle en H, on a $\mathrm{AH}^2+\mathrm{HC}^2 = \mathrm{AC}^2$. Et puisque HC^2 est positif, on en déduit $\mathrm{AH}^2 \leqslant \mathrm{AC}^2$. Si l'on met tout bout à bout cela donne bien

$$\mathrm{AB}^2 < \mathrm{AH}^2 \leqslant \mathrm{AC}^2.$$

Oublions le terme du milieu et revenons aux distances : $\mathrm{AB}^2 < \mathrm{AC}^2$ donne $\mathrm{AB} < \mathrm{AC}$, en particulier $\mathrm{AB} < \mathrm{AC} + \mathrm{CB}$.

Question 4

On fait pareil : dans le cas où H est sur la demi-droite [BA) au-delà de A, on a $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} < \mathrm{BH}$. Soit $\mathrm{AB}^2 < \mathrm{BH}^2$.

Dans le triangle BHC rectangle en H, le théorème de Pythagore s'écrit $\mathrm{BH}^2 + \mathrm{HC}^2 = \mathrm{BC}^2$. Puisque HC^2 est positif, cela donne $\mathrm{BH}^2 \leqslant \mathrm{BC}^2$, soit $\mathrm{BH} \leqslant \mathrm{BC}$. Donc finalement $\mathrm{AB} \leqslant \mathrm{BC}$, et en particulier $\mathrm{AB} < \mathrm{AC} + \mathrm{CB}$.

Question 5

Les relations de Pythagore utilisées dans les deux questions précédentes sont toujours vraies : on a donc toujours $\mathrm{AH} \leqslant \mathrm{AC}$ et $\mathrm{BH} \leqslant \mathrm{BC}$. Sauf que cette fois, on a $\mathrm{AB} = \mathrm{AH} + \mathrm{HB}$, puisque H est sur le segment [AB] soit quelque part « entre » A et B. Finalement :

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AH} + \mathrm{BH} \leqslant \mathrm{AC} + \mathrm{CB}.$$

Pour avoir égalité, il faut et il suffit qu'on ait simultanément $\mathrm{AH} = \mathrm{AC}$ et $\mathrm{BH} = \mathrm{BC}$, soit, dans le théorème de Pythagore, que $\mathrm{HC}^2 = 0$. Ceci se produit lorsque C est confondu avec H, autrement dit lorsque C est lui-même sur le segment [AB].

Question 6

Bien sûr l'égalité $\mathscr{D} = \Delta$ implique chacune des deux inclusions $\mathscr{D} \subseteq \Delta$ et $\Delta \subseteq \mathscr{D}$. Imaginons maintenant que $\mathscr{D} \neq \Delta$. Il y a donc : soit un point de $\mathscr{D}$ qui n'appartient pas à Δ (auquel cas l'inclusion $\mathscr{D} \subseteq \Delta$ est fausse), soit un point de Δ qui n'appartient pas à $\mathscr{D}$ (auquel cas c'est l'implication $\Delta \subseteq \mathscr{D}$ qui est fausse).

Question 7

Soit $\mathrm{M} \in \Delta$. On a $\mathrm{AI} = \mathrm{IB}$ (car I est le milieu de [AB]), $\mathrm{IM} = \mathrm{IM}$ (bah oui), et $\mathrm{AM} = \mathrm{BM}$ (car $\mathrm{M} \in \Delta$, qui par définition est l'ensemble des points à égale distance de A et B). Donc les triangles AIM et BIM sont superposables (en particulier semblables), et ils ont les mêmes angles. Ainsi $\widehat{\mathrm{AIM}}$ et $\widehat{\mathrm{BIM}}$ sont superposables, et puisque leur somme est l'angle plat $\widehat{\mathrm{AIB}}$, chacun des deux est droit (car la moitié d'un angle plat, c'est un angle droit).

On en déduit que $(\mathrm{IM}) \perp (\mathrm{AB})$, et comme il ne peut y avoir qu'une seule perpendiculaire à (AB) passant par I, et que celle-ci est $\mathscr{D}$, on a $(\mathrm{IM}) = \mathscr{D}$, soit $\mathrm{M} \in \mathscr{D}$.

Question 8

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{D}$. L'angle $\widehat{\mathrm{AIM}}$ est donc droit, et dans le triangle AIM rectangle en I, le théorème de Pythagore s'écrit

$$\mathrm{AI}^2 + \mathrm{IM}^2 = \mathrm{AM}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{AM} = \sqrt{\mathrm{AI}^2 + \mathrm{IM}^2}.$$

De la même manière, dans le triangle BIM rectangle en I, on a

$$\mathrm{BI}^2 + \mathrm{IM}^2 = \mathrm{BM}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{BM} = \sqrt{\mathrm{BI}^2 + \mathrm{IM}^2}.$$

Maintenant, on a $\mathrm{AI}^2 = \mathrm{BI}^2$ (car I est toujours le milieu de [AB]), et donc $\mathrm{AM} = \mathrm{BM}$. Ainsi $\mathrm{M} \in \Delta$.

Question 9

Procédons par l'absurde et supposons que $\mathscr{D}_{\mathrm{A,B}}$ et $\mathscr{D}_{\mathrm{B,C}}$ sont parallèles. Puisque (AB) est perpendiculaire à $\mathscr{D}_{\mathrm{A,B}}$, elle est aussi perpendiculaire à $\mathscr{D}_{\mathrm{B,C}}$. Or on a une deuxième droite qui est perpendiculaire à $\mathscr{D}_{\mathrm{B,C}}$ et qui passe par B : c'est (BC). Puisqu'il ne peut y avoir qu'une telle droite, et que (AB) et (BC) satisfont toutes les deux ces propriétés, elles sont confondues ; autrement dit A, B et C sont alignés et le triangle est aplati. Et on arrive à une contradiction puisque par hypothèse ce triangle *n'est pas* aplati.

On en conclut que $\mathscr{D}_{\mathrm{A,B}}$ et $\mathscr{D}_{\mathrm{B,C}}$ ne sont pas parallèles.

Question 10

Le point O étant sur la médiatrice de [AB], on a AO = BO. Comme il est aussi sur la médiatrice de [BC], on a BO = CO. Bon. Ça fait AO = BO = CO, en particulier AO = CO, et donc O est sur la médiatrice de [CA]. Donc il est sur les trois médiatrices. Donc elles sont concourantes.

Question 11

Le point O étant situé à égale distance des *trois* sommets du triangle, on peut tracer un cercle, de centre O, qui passe par ces trois sommets. C'est le cercle *circonscrit* au triangle.