Jour 7

NOMBRES ALGÉBRIQUES

solutions

Question 1

L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -2\sqrt{3}$ et $c = 1$. Son discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 - 4 = 8$. Il y a donc deux solutions, à savoir

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{3})-\sqrt{8}}{2\times 1} = \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{3})+\sqrt{8}}{2\times 1} = \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}+\sqrt{2},$$

puisque $\sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Question 2

On recommence. L'équation est de la forme $ax^2+bx+c = 0$ avec $a = 1$, $b = -2\sqrt{n}$ et $c = 1$. Son discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{n})^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4n - 4 = 4(n-1)$. Comme $n \geqslant 1$, on a $n-1 \geqslant 0$ et donc $\Delta \geqslant 0$, et il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{n})-\sqrt{4(n-1)}}{2\times 1} = \frac{2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}}{2} = \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$

et

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2\sqrt{n})+\sqrt{4(n-1)}}{2\times 1} = \frac{2\sqrt{n}+2\sqrt{n-1}}{2} = \sqrt{n}+\sqrt{n-1},$$

puisque $\sqrt{4(n-1)} = \sqrt{4} \times \sqrt{n-1} = 2\sqrt{n-1}$. Évidemment pour $n = 3$ on retrouve les solutions de l'équation précédente (sinon c'est qu'on s'est trompé quelque part !).

Question 3

On a

$$\alpha + \beta = (\sqrt{3}+\sqrt{2}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{3},$$
$$\alpha - \beta = (\sqrt{3}+\sqrt{2}) - (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2},$$

et

$$\alpha \times \beta = (\sqrt{3}+\sqrt{2}) \times (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 3 - 2 = 1,$$

d'après la troisième identité remarquable.

Question 4

Et donc $(\alpha+\beta)^2 = (2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$ et $(\alpha-\beta)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$.

Question 5

Alors maintenant, réfléchissons : d'après les deux premières identités remarquables, on a

$$(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2 = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = 2\alpha^2 + 2\beta^2.$$

Mais on sait que $(\alpha+\beta)^2 = 12$ et que $(\alpha-\beta)^2 = 8$, ainsi $2\alpha^2 + 2\beta^2 = 12 + 8 = 20$, et donc en divisant par deux on obtient

$$\alpha^2 + \beta^2 = 10.$$

Question 6

Cette fois-ci, on calcule directement :

$$\alpha^2 = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

On a donc $\alpha^2 - 5 = 2\sqrt{6}$, c'est-à-dire $(\alpha^2-5)^2 = 24$ (et pas $(\alpha^2-7)^2 = 24$, comme il était initialement écrit dans l'énoncé : deuxième erreur en *deux* jours, ça commence à bien faire).

En développant l'équation $(x^2-5)^2 = 24$, on obtient $x^4 - 10x^2 + 25 = 24$, c'est-à-dire $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. C'est donc une équation du quatrième degré.

Question 7

On peut refaire les calculs, mais on va trouver la même équation : en effet β^2 et α^2 diffèrent juste par le signe du double-produit. Plus précisément :

$$\beta^2 = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 3 - 2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Et donc à nouveau $\beta^2 - 5 = -2\sqrt{6}$, qui au carré donne 24 lui aussi (puisque deux nombres opposés ont le même carré). Et donc β satisfait la même équation à coefficients entiers que α, à savoir $(x^2-5)^2 = 24$.