IDENTITÉS REMARQUABLES

solutions

Question 1
On a $4x^2 = (2x)^2$ donc

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = (2x + 3)^2.$$

Question 2
Le 7/2 vient de

$$-2^2 + \frac{15}{2} = -4 + \frac{15}{2} = -\frac{8}{2} + \frac{15}{2} = \frac{7}{2}.$$

Question 3
Allons-y :

$$\begin{aligned}
3x^2 - 18x + 10 &= 3 \times \left(x^2 - 6x + \frac{10}{3}\right) \\
&= 3 \times \left(x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 - 3^2 + \frac{10}{3}\right) \\
&= 3 \times \left((x-3)^2 - 9 + \frac{10}{3}\right) \\
&= 3 \times \left((x-3)^2 - \frac{17}{3}\right) \\
&= 3 \times (x-3)^2 - 17.
\end{aligned}$$

Question 4
On remplace directement dans la formule :

$$(x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 3^3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0.$$

Il y avait une erreur dans l'énoncé (corrigée depuis) : c'est bien $-4x$ dans l'équation et pas $-2x$.

Question 5
On a $x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 4$ et $y^2 - 10y = y^2 - 10y + 25 - 25 = (y-5)^2 - 25$, donc

$$x^2 - 4x + y^2 - 10y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y-5)^2 = 25,$$

et puisque $25 = 5^2$ cela correspond à $\mathrm{R} = 5$, $x_\Omega = 2$ et $y_\Omega = 5$.

Question 6
On fait le même travail :

$$x^2 + 5x = x^2 + 2 \times x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

et

$$y^2 - 3y = y^2 - 2 \times y \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

On en déduit

$$x^2 + 5x + y^2 - 3y + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{9}{4} - k.$$

L'équation a des solutions lorsque le membre de droite est positif ou nul, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{25}{4} + \frac{9}{4} - k \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{34}{4} \geqslant k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{17}{2} \geqslant k.$$

Pour $k = 17/2$, l'ensemble est réduit à un point (c'est un cercle de rayon nul), à savoir $\Omega(5/2\,;\,-3/2)$. Pour $k < 17/2$, on obtient un cercle de centre ce même Ω et de rayon $\sqrt{17/2 - k}$.

Exercice : simplification d'expressions radicielles

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{1}{1+\sqrt{6}} = \dfrac{1 \times (1-\sqrt{6})}{(1+\sqrt{6}) \times (1-\sqrt{6})} = \dfrac{1-\sqrt{6}}{1-6} = \dfrac{\sqrt{6}-1}{5}$

c) $\dfrac{1+\sqrt{7}}{2+\sqrt{7}} = \dfrac{(1+\sqrt{7}) \times (2-\sqrt{7})}{(2+\sqrt{7}) \times (2-\sqrt{7})} = \dfrac{2+2\sqrt{7}-\sqrt{7}-7}{4-7} = \dfrac{-5+\sqrt{7}}{-3} = \dfrac{5-\sqrt{7}}{3}$

d) $\dfrac{2+\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}} = \dfrac{(2+\sqrt{8}) \times (3-\sqrt{8})}{(3+\sqrt{8}) \times (3-\sqrt{8})} = \dfrac{6+3\sqrt{8}-2\sqrt{8}-8}{9-8} = \dfrac{-2+\sqrt{8}}{1} = \sqrt{8}-2$

Question 7

On *peut* faire aussi bien, mais il faut faire en deux fois. Remarquons d'abord que $\sqrt{1} = 1$, c'était juste décoratif. Ensuite :

$$\frac{1}{1 + (\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{1 \times (1 - (\sqrt{2}+\sqrt{3}))}{(1 + (\sqrt{2}+\sqrt{3})) \times (1 - (\sqrt{2}+\sqrt{3}))} = \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}.$$

Là on calcule $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2 \times 3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$. On peut donc faire une deuxième fois la même chose (même si entre temps, le numérateur s'est compliqué) :

$$\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-5-2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1) \times (4-2\sqrt{6})}{(4+2\sqrt{6}) \times (4-2\sqrt{6})}$$

Commençons par le plus simple : au dénominateur, on trouve $4^2 - (2\sqrt{6})^2 = 16 - 24 = -8$, et au numérateur

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1) \times (4-2\sqrt{6}) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{12} - 2\sqrt{18} + 2\sqrt{6}$$

qui se simplifie un peu : $2\sqrt{12} = 2 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ et de même $2\sqrt{18} = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Finalement :

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}+4\sqrt{3}-4-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{-8} = \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}+4}{8} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+2}{4}.$$