Jour 5

DÉCIMAUX, RATIONNELS ET IRRATIONNELS

solutions

Question 1

Le produit d'un nombre pair par un nombre pair est un nombre pair, donc si n est pair, n^2 aussi. Le produit d'un nombre impair par un nombre impair est un nombre impair, donc si n est impair, n^2 aussi.

Réciproquement, eh bien tout est déjà dit : si n^2 est pair, alors n ne peut qu'être pair (car s'il était impair, n^2 le serait aussi). Et de même, si n^2 est impair, alors n ne peut qu'être impair (car s'il était pair, n^2 le serait aussi).

Question 2

Considérons un nombre n pair : il est donc de la forme $n = 2 \times k$ pour un certain entier k (un nombre pair est par définition le double d'un entier). Ce qui veut dire que $n^2 = (2 \times k)^2 = 2^2 \times k^2 = 4 \times k^2$, et donc est un multiple de 4.

Question 3

Voilà une démonstration à connaître : elle est au programme de seconde. On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'on peut l'écrire comme une fraction d'entiers a/b, qu'on suppose irréductible (quitte à la simplifier). On a

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times a^2 = b^2.$$

Puisque b^2 est le double de a^2, c'est donc un nombre pair, et donc b aussi est pair. On peut donc l'écrire $b = 2 \times k$ (pour un certain entier k), c'est-à-dire $b^2 = 4 \times k^2$. En remplaçant et en simplifiant il vient

$$2 \times a^2 = 4 \times k^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 2 \times k^2.$$

Ainsi, a^2 est le double de k^2, c'est donc un nombre pair, et donc a lui aussi est pair.

Et c'est une contradiction : a et b ne peuvent pas être pairs tous les deux, car sinon la fraction a/b pourrait se simplifier par deux, et ce n'est pas le cas puisqu'on l'a supposée irréductible.

Question 4

On a $26/20 = 13/10$ donc c'est bien un nombre décimal.

Question 5

Qu'y a-t-il à dire ici ? Un nombre décimal s'écrit par définition $a/10^p$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $p \in \mathbf{N}$, donc en particulier a/b, avec $b = 10^p \in \mathbf{N}^*$. C'est donc bien un rationnel.

Question 6

La relation $3 \times a = 10^p$ est impossible car elle implique que 10^p est un multiple de trois. Ce n'est pas le cas : la somme de ses chiffres vaut clairement 1, et donc le critère de divisibilité par 3 n'est pas satisfait.

Question 7

On a $100x = 74{,}999\,999\ldots$ (on décale la virgule) et donc $100x - 74 = 0{,}999\,999\ldots$. D'autre part $x + 1/4 = 0{,}749\,999\cdots + 0{,}25 = 0{,}999\,999\ldots$. On a donc $100x - 74 = x + 1/4$.

Question 8

Oublions un instant ce que vaut x et résolvons l'équation qu'il satisfait : on a

$$100x - 74 = x + \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 99x = 74 + \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 99x = \frac{297}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{297}{4 \times 99} = \frac{3 \times 99}{4 \times 99} = \frac{3}{4}.$$

Donc x est bien égal à $3/4 = 0{,}75$, qui admet ainsi deux développements décimaux différents.

Question 9

Avec $a = 75$ et $p = 2$ on obtient

$$x = \frac{75}{100} + \frac{0{,}999\,999\ldots}{100} = 0{,}75 + 0{,}009\,999\,999\cdots = 0{,}759\,999\,999\ldots$$

ce qui n'est pas tout à fait le x des questions précédentes (c'était censé, mais c'est une erreur de l'énoncé).

Question 10

Deux approches ici : la première consiste à essayer d'adapter la démonstration faite pour 3/4, c'est un peu pénible. Faisons plus simple, et démontrons que $t = 0{,}999\,999\ldots$ est égal à 1 : si on adapte la démonstration faite pour 3/4 on trouve l'équation

$$10t - 9 = t \quad \Leftrightarrow \quad 9t = 9 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1.$$

Donc

$$\frac{a}{10^p} + \frac{0{,}999\,999\ldots}{10^p} = \frac{a}{10^p} + \frac{1}{10^p} = \frac{a+1}{10^p}.$$