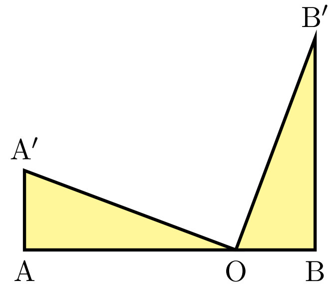
Jour 4

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

solutions

Question 1

Regardons un petit bout de la figure, et nommons les points qui apparaissent.



Dans le triangle AOA′, la somme des angles vaut 180°. Et puisqu'il y a un angle droit, la somme des deux autres vaut 90° :

$$\text{mes}\left(\widehat{\text{AOA}'}\right) + \text{mes}\left(\widehat{\text{AA}'\text{O}}\right) = 90°.$$

Ce triangle est superposable à BB′O, de sorte que $\text{mes}\left(\widehat{\text{BOB}'}\right) = \text{mes}\left(\widehat{\text{AA}'\text{O}}\right)$. Enfin, on a un angle plat :

$$\text{mes}\left(\widehat{\text{AOA}'}\right) + \text{mes}\left(\widehat{\text{B}'\text{OA}'}\right) + \text{mes}\left(\widehat{\text{BOB}'}\right) = 180°.$$

Par soustraction, il reste donc $\text{mes}\left(\widehat{\text{B}'\text{OA}'}\right) = 90°$. Le quadrilatère incliné est donc bien un carré (on peut refaire le raisonnement pour ses quatre angles, mais ce n'est pas la peine : un losange avec un angle droite *est* un carré.

Question 2

Les deux figures forment un grand carré (de côté $a+b$). Dans la disposition de gauche, son aire vaut $4 \times \mathscr{A} + c^2$ (si l'on note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle rectangle). Dans la disposition de droite, son aire vaut $4 \times \mathscr{A} + a^2 + b^2$. Et puisqu'il faut que ce soit la même chose, on en déduit

$$4 \times \mathscr{A} + c^2 = 4 \times \mathscr{A} + a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Question 3

Remarquons que B et K ont la même abscisse, par construction : donc x_K et x_B, c'est la même chose. Quoi qu'il en soit on a $\text{AK}^2 = (x_\text{B} - x_\text{A})^2 = (x_\text{A} - x_\text{B})^2$, c'est comme on veut. De la même manière $\text{KB}^2 = (y_\text{B} - y_\text{A})^2$.

Question 4

Et donc d'après le théorème de Pythagore (le triangle AKB est rectangle en K, puisque (AK) et (KB) sont parallèles aux deux axes, qui sont perpendiculaires, ce qui fait qu'elles sont elles-mêmes perpendiculaires) :

$$\text{AB}^2 = \text{AK}^2 + \text{KB}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{AB}^2 = (x_\text{B} - x_\text{A})^2 + (y_\text{B} - y_\text{A})^2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{AB} = \sqrt{(x_\text{B} - x_\text{A})^2 + (y_\text{B} - y_\text{A})^2}.$$

Question 5

Le triangle AHC est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore on a

$$\text{AC}^2 = \text{AH}^2 + \text{HC}^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \text{HC}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{HC} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a \times \sqrt{\frac{3}{4}},$$

comme le fait sagement remarquer l'auteur de l'énoncé.

Question 6

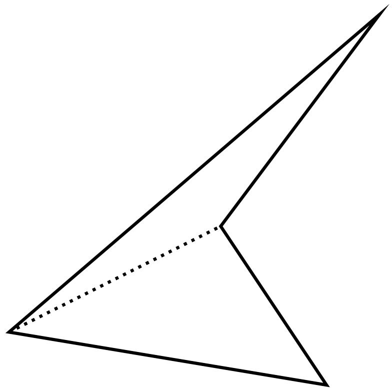
Eh bah donc l'aire vaut

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{HC} = \frac{1}{2} \times a \times a \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{a^2 \times \sqrt{3}}{2 \times \sqrt{4}} = \frac{a^2 \times \sqrt{3}}{4}$$

puisque $\sqrt{4} = 2$ et que $2 \times 2 = 4$.

Question 7

Dans un quadrilatère *non croisé* (l'énoncé aurait dû le préciser, sinon il faut s'entendre sur ce qu'on appelle les angles), la somme des angles vaut 360°. Pour le voir, il faut remarquer qu'une des deux diagonales est toujours à l'intérieur du quadrilatère, et qu'en la traçant, on fait apparaître deux triangles, qui ont chacun une somme des angles égale à 180°.



Revenons à l'hexagone. Dans le quadrilatère ABCD, en exploitant les symétries de la figure, on voit que les angles $\widehat{\mathrm{A}}$ et $\widehat{\mathrm{D}}$ sont égaux, et les angles $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$ aussi (et ils sont deux fois plus grands que les deux premiers). On obtient donc

$$6 \times \mathrm{mes}\left(\widehat{\mathrm{A}}\right) = 360° \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{mes}\left(\widehat{\mathrm{A}}\right) = 60°$$

et $\mathrm{mes}\left(\widehat{\mathrm{B}}\right) = 120°$.

Question 8

L'hexagone est donc constitué de six triangles isocèles ayant des angles à la base de 60° : ce sont donc en fait des triangles équilatéraux, de côté a.

Question 9

L'aire de l'hexagone est six fois l'aire d'un de ces triangles, c'est-à-dire

$$6 \times \frac{a^2 \times \sqrt{3}}{4} = a^2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice : la formule d'Al-Kashi

a) Le triangle AHC est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\mathrm{AH}^2 + \mathrm{HC}^2 = \mathrm{AC}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{HC}^2 = \mathrm{AC}^2 - \mathrm{AH}^2.$$

b) Deuxième identité remarquable :

$$\mathrm{HB}^2 = (\mathrm{AB} - \mathrm{AH})^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AH}^2 - 2 \times \mathrm{AB} \times \mathrm{AH}.$$

c) Le triangle HBC est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore (décidément, il n'y a que lui !) :

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{HB}^2 + \mathrm{HC}^2.$$

On ajoute les deux expressions trouvées dans les questions précédentes pour obtenir ce qui est demandé, à savoir

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{HC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AH}^2 - 2 \times \mathrm{AB} \times \mathrm{AH} + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{AH}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2 \times \mathrm{AB} \times \mathrm{AH},$$

avec les AH^2 qui s'éliminent.