Jour 3

PUISSANCES

solutions

Exercice : fractions

a) $\dfrac{2^{15}\times 5^{12}}{20^{10}} = \dfrac{2^{15}\times 5^{12}}{(2\times 2\times 5)^{10}} = \dfrac{2^{15}\times 5^{12}}{2^{10}\times 2^{10}\times 5^{10}} = \dfrac{2^{15}\times 5^{12}}{2^{20}\times 5^{10}} = \dfrac{5^2}{2^5}\left(=\dfrac{25}{32}\right),$

b) $\dfrac{6^8\times 8^6}{15^6\times 4^{10}} = \dfrac{(2\times 3)^8\times (2^3)^6}{(3\times 5)^6\times (2^2)^{10}} = \dfrac{2^8\times 3^8\times 2^{18}}{3^6\times 5^6\times 2^{20}} = \dfrac{2^{26}\times 3^8}{2^{20}\times 3^6\times 5^6} = \dfrac{2^6\times 3^2}{5^6},$

c) $\dfrac{10^{10}\times 50^{12}}{25^5\times 1000^5} = \dfrac{(2\times 5)^{10}\times (2\times 5\times 5)^{12}}{(5^2)^5\times (2^3\times 5^3)^5} = \dfrac{2^{10}\times 5^{10}\times 2^{12}\times 5^{12}\times 5^{12}}{5^{10}\times 2^{15}\times 5^{15}} = \dfrac{2^{22}\times 5^{34}}{2^{15}\times 5^{25}} = 2^7\times 5^9,$

d) $\dfrac{24^9\times 9^{24}}{27^{20}\times 32^5} = \dfrac{(2^3\times 3)^9\times (3^2)^{24}}{(3^3)^{20}\times (2^5)^5} = \dfrac{2^{27}\times 3^9\times 3^{48}}{3^{60}\times 2^{25}} = \dfrac{2^{27}\times 3^{57}}{3^{60}\times 2^{25}} = \dfrac{2^2}{3^3}\left(=\dfrac{4}{27}\right).$

Question 1

Puisqu'on veut le diamètre en centimètres, commençons par convertir le volume en centimètres-cubes : $1\,\mathrm{L} = 1\,000\,\mathrm{cm}^3$. Ensuite

$$\mathscr{V} = \frac{4}{3}\times \pi \mathrm{R}^3 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{R}^3 = \frac{3\times\mathscr{V}}{4\times\pi} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{R} = \sqrt[3]{\frac{3\times\mathscr{V}}{4\times\pi}}.$$

Puis on fait l'application numérique :

$$\mathrm{R} \simeq \sqrt[3]{\frac{3\times 1\,000\,\mathrm{cm}^3}{4\times 3{,}141\,6\ldots}} \simeq 6{,}204\ldots\ \mathrm{cm}$$

ce qui fait un diamètre de $12{,}41\ldots$ cm.

Question 2

On a $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$, et plus généralement $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$, puisque lorsqu'on élève cette quantité à la puissance quatrième, on obtient x :

$$\left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)^4 = \left(\left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)^2\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

Question 3

On a $(\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n\times(\sqrt[n]{b})^n = a\times b$, d'où en prenant la racine n-ième de chaque côté

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\times b}.$$

Question 4

Évidemment, puisqu'on doit *simplifier*, on ne calcule pas le grand produit, on décompose :

$$\sqrt[3]{100}\times\sqrt[3]{108}\times\sqrt[3]{160} = \sqrt[3]{(10^2)\times(4\times 3^3)\times(10\times 4^2)} = \sqrt[3]{3^3\times 4^3\times 10^3} = 3\times 4\times 10 = 120.$$

Question 5

Si la raison vaut q, et puisqu'on fait cinq pas pour aller de u_5 à u_{10}, on a

$$\frac{u_{10}}{u_5} = q^5.$$

Question 6

On a $q^2 = v_6/v_4 = 10/8 = 5/4$. Donc $v_8 = v_6 \times q^2 = 10 \times 5/4 = 50/4 = 25/2$. Pour v_9, on a besoin de $q = \pm\sqrt{5/4} = \pm\sqrt{5}/2$. Il y a deux possibilités, selon que la raison est positive ou négative, donc

$$v_9 = \pm\frac{25}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \pm\frac{25\sqrt{5}}{4}.$$

Exercice : notes de musique

a) On a donc $q^{12} = 2$ et ainsi $q = \sqrt[12]{2}$.

b) Puisqu'on recule de neuf pas, on obtient la fréquence du do avec

$$\frac{440\,\text{Hz}}{(\sqrt[12]{2})^9} \simeq 261{,}63\,\text{Hz}.$$