Jour 2

DÉCOUPAGES ET RECOLLEMENTS

solutions

Question 1

Dans l'énoncé, les diagonales du parallélogramme ont été tracées : elles se coupent en un point K, qui est un centre de symétrie de ce parallélogramme. La symétrie de centre K, qui préserve l'alignement et les angles, échange les deux triangles jaune pâle, qui sont donc superposables ; en particulier ils ont les mêmes dimensions.

Question 2

Chacun de ces triangles jaune pâle (c'est la deuxième fois qu'on l'utilise au pluriel : comme tous les adjectifs de couleur composés, il est invariable, ndlr) a pour aire $\dfrac{b' \times h}{2}$ (ce sont des triangles rectangles). Par soustraction, on en déduit que l'aire du parallélogramme vaut

$$(b + b') \times h - 2 \times \frac{b' \times h}{2} = b \times h + b' \times h - b' \times h = b \times h.$$

Question 3

Considérons la symétrie s de centre K. Elle envoie A sur un point A$'$, et le quadrilatère ABA$'$C est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leurs milieux (K est le milieu de [BC] par définition, et aussi celui de [AA$'$] puisque A$' = s$(A)). Cette symétrie transforme le triangle jaune vif en le triangle jaune pâle, ils sont donc superposables, et ont chacun une aire égale à la moitié de celle du parallélogramme. C'est-à-dire $\dfrac{b \times h}{2}$.

Reprenons toute la démonstration de cette première partie, pour être sûr qu'on a bien compris : on part de la formule qui donne l'aire d'un rectangle (« longueur fois largeur »), et qu'on ne cherche pas à démontrer ; en fait on peut considérer que c'est la définition de la multiplication. De cette formule, on déduit une formule pour l'aire des triangles rectangles. Puis de cette deuxième formule, on déduit la formule pour l'aire des parallélogrammes. Et enfin de cette troisième formule, on déduit celle qui donne l'aire d'un triangle quelconque.

Question 4

Les parallélogrammes ont deux côtés opposés parallèles (les deux autres aussi, mais peu importe) : ce sont donc des trapèzes. La réciproque est évidemment fausse.

Question 5

La construction est faite sur la figure : soit K le point indiqué sur la figure. La symétrie de centre K transforme le trapèze jaune vif en le trapèze jaune pâle. La réunion de ces deux trapèzes forme un parallélogramme (car lorsqu'on applique une symétrie, toute droite est transformée en une autre droite qui lui est parallèle). L'aire du trapèze est donc la moitié de l'aire de ce grand parallélogramme, de hauteur h et de base $b + b'$. D'où, en divisant par deux, la formule

$$\mathscr{A}_{\text{trapze}} = \frac{(b + b') \times h}{2}.$$

Exercice : arc, corde et flèche

a) Dans ces deux premières questions, il s'agit de faire de la manipulation algébrique. Allons-y :

$$(\mathrm{R}-f)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2=\mathrm{R}^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{c^2}{4}=\mathrm{R}^2-(\mathrm{R}-f)^2.$$

Arrêtons-nous un instant sur ce membre de gauche : en développant avec la deuxième identité remarquable, il se simplifie :

$$\mathrm{R}^2-(\mathrm{R}-f)^2=\mathrm{R}^2-(\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}f+f^2)=\mathrm{R}^2-\mathrm{R}^2+2\mathrm{R}f-f^2=(2\mathrm{R}-f)\times f.$$

Reprenons à partir de là :

$$\frac{c^2}{4}=(2\mathrm{R}-f)\times f \quad\Leftrightarrow\quad c^2=4\times(2\mathrm{R}-f)\times f \quad\Leftrightarrow\quad c=2\times\sqrt{(2\mathrm{R}-f)\times f}=2f\times\sqrt{\frac{2\mathrm{R}}{f}-1}$$

(et on prend le signe + au moment d'extraire la racine carrée, parce qu'on cherche une longueur et qu'une longueur, c'est positif). Au passage remarquons que c'est 2R qui apparaît, c'est-à-dire le diamètre du cercle, plutôt que le rayon lui-même.

Ce n'était pas demandé, mais on peut aussi exprimer R en fonction de c et f :

$$\frac{c^2}{4}=(2\mathrm{R}-f)\times f \quad\Leftrightarrow\quad \frac{c^2}{4f}=2\mathrm{R}-f \quad\Leftrightarrow\quad 2\mathrm{R}=\frac{c^2}{4f}+f \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{R}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{c^2}{4f}+f\right).$$

b) Pour « isoler » f, c'est mieux de partir d'une relation où il n'apparaît qu'une seule fois :

$$\frac{c^2}{4}=\mathrm{R}^2-(\mathrm{R}-f)^2 \quad\Leftrightarrow\quad (\mathrm{R}-f)^2=\mathrm{R}^2-\frac{c^2}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{R}-f=\sqrt{\mathrm{R}^2-\frac{c^2}{4}} \quad\Leftrightarrow\quad f=\mathrm{R}-\sqrt{\mathrm{R}^2-\frac{c^2}{4}}.$$

Arrêtons une nouvelle fois sur l'extraction de la racine carrée : algébriquement, on a

$$\mathrm{R}-f=\sqrt{\mathrm{R}^2-\frac{c^2}{4}} \qquad\text{ou}\qquad f-\mathrm{R}=\sqrt{\mathrm{R}^2-\frac{c^2}{4}}$$

puisque $\mathrm{R}-f$ et $f-\mathrm{R}$, qui sont opposés, ont le même carré. Sauf que vu la configuration, c'est $\mathrm{R}-f$ qui est positif (la flèche est toujours plus petite que le rayon).

c) L'aire du disque tout entier vaut $\pi\times\mathrm{R}^2$. L'aire d'une portion de disque étant proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte, celle qui nous intéresse vaut

$$\frac{\theta}{2\pi}\times\pi\times\mathrm{R}^2=\frac{\theta\times\mathrm{R}^2}{2}.$$

d) Si l'on prend pour base le côté [AB], qui mesure $c=2\times\mathrm{R}\times\sin(\theta/2)$, la hauteur vaut $\mathrm{R}-f=\mathrm{R}\times\cos(\theta/2)$. L'aire du triangle AOB vaut donc

$$\frac{b\times h}{2}=\frac{2\times\mathrm{R}\times\sin(\theta/2)\times\mathrm{R}\times\cos(\theta/2)}{2}=\mathrm{R}^2\times\sin(\theta/2)\times\cos(\theta/2).$$

e) Par soustraction, on en déduit que l'aire de la figure jaune vif vaut

$$\frac{\theta\times\mathrm{R}^2}{2}-\mathrm{R}^2\times\sin(\theta/2)\times\cos(\theta/2)=\mathrm{R}^2\times\left(\frac{\theta}{2}-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$