Jour 1

SUITES ET SOMMES ARITHMÉTIQUES

solutions

Question 1
Dans la suite proposée, on a $u_0 = 4$ et $p = 7$. En appliquant la formule on obtient

$$u_{100} = u_0 + 100p = 4 + 100 \times 7 = 704$$

et

$$u_{1000} = u_0 + 1000p = 4 + 1000 \times 7 = 7004.$$

Question 2
Puisque $v_{20} = v_0 + 20p$, on a

$$p = \frac{v_20 - v_0}{20} = \frac{80 - 50}{20} = \frac{3}{2}.$$

On en déduit

$$v_{100} = v_0 + 100p = 50 + 100 \times \frac{3}{2} = 200$$

et

$$v_{1001} = v_0 + 1001p = 50 + 1001 \times \frac{3}{2} = \frac{3103}{2} = 1\,551{,}5.$$

Pour la première valeur à calculer, on peut aussi remarquer que pour aller de v_0 à v_{100}, on fait cinq fois 20 pas, et que 20 pas valent $v_{20} - v_0 = 30$, donc $v_{100} = v_0 + 5 \times 30 = 50 + 150 = 200$.

Question 3
Essayons de calculer la raison avec les deux premières valeurs :

$$p = \frac{w_{30} - w_3}{30 - 3} = \frac{40 - 30}{27} = \frac{10}{27},$$

puis avec la deuxième et la troisième :

$$p = \frac{w_{300} - w_{30}}{300 - 30} = \frac{1000 - 40}{270} = \frac{960}{270} = \frac{96}{27}.$$

Ce n'est pas du tout la même chose, donc la suite n'est pas arithmétique.

Question 4
De n à $n + k$ il y a $(n + k) - n + 1 = k + 1$ termes. Si l'on n'est pas convaincu par cette formule, on essaie avec $n = 0$ et $k = 10$: de 0 à 10 il y a 11 nombres.

Question 5
Sur la somme écrite « à l'endroit » on ajoute p à chaque terme, pendant que sur la somme écrite « à l'envers » on retranche p à chaque terme. Si on ajoute les deux, c'est comme si on avait rien fait :

$$u_{n+1} + u_{n+k-1} = (u_n + p) + (u_{n+k} - p) = u_n + u_{n+k}.$$

Les sommes « en colonne » sont donc toujours égales à $u_n + u_{n+k}$ (le premier terme plus le dernier).

Question 6

Dans la somme $10 + 25 + 40 + 55 + \ldots + 5995$ le premier terme u_0 est 10 et la raison est $p = 15$. Le dernier terme est $u_n = u_0 + n \times p = 5995$, son indice est donc

$$n = \frac{5995 - u_0}{p} = \frac{5995 - 10}{15} = \frac{5985}{15} = 399.$$

De l'indice 0 à 399 il y a 400 termes. Donc finalement, en appliquant la formule :

$$10 + 25 + \ldots + 5995 = \frac{400 \times (10 + 5\,995)}{2} = 1\,201\,000.$$

Question 7

À nouveau on applique la formule : dans la somme $1 + 2 + \ldots + n$ il y a n termes, le premier est 1, le dernier est n, donc

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \times (1 + n)}{2}.$$

Exercice : somme des nombres impairs

a) On a une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $p = 2$. Le terme d'indice n est donc $u_n = u_0 + n \times p = 1 + 2n = 2n + 1$.

b) Et donc, à nouveau avec la formule :

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = u_0 + u_1 + \ldots u_{n-1} = \frac{n \times (u_0 + u_{n-1}}{2} = \frac{n \times (1 + 2n - 1)}{2} = n^2.$$

Une petite remarque pour ceux qui ne sont pas concentrés : $u_n = 2n + 1$ donc $u_{n-1} = 2(n - 1) + 1 = 2n - 2 + 1 = 2n - 1$.

Exercice : recherche de termes entiers

a) Avec $u_0 = 2/3$ et $p = 1/2$ on a

$$u_n = u_0 + n \times p = \frac{2}{3} + \frac{n}{2} = \frac{4}{6} + \frac{3n}{6} = \frac{2 + 3n}{6}.$$

Pour que ceci soit un nombre entier, il faut que $2 + 3n$ soit divisible par 6, donc en particulier par 3. Ce n'est pas possible : quand on divise $2 + 3n$ par 3, il reste toujours 2 (c'est tautologique). Donc la suite ne contient aucun terme entier.

b) Supposons que dans la suite, le terme de rang n est entier (et appelons cet entier K). On a donc

$$u_n = \mathrm{K} = u_0 + n \times p = \frac{1}{2} + n \times p \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\mathrm{K} - 1/2}{n} = \frac{2\mathrm{K} - 1}{2n}.$$

La raison p doit donc être de la forme « un nombre impair divisé par un nombre pair » (car K et n sont quelconques dans le calcul ci-dessus : $2\mathrm{K} - 1$ désigne donc un nombre impair quelconque, et $2n$ un nombre pair quelconque). Essayons : prenons $p = 5/8$, on a

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \xrightarrow{+5/8} \frac{9}{8} \xrightarrow{+5/8} \frac{14}{8} \xrightarrow{+5/8} \frac{19}{8} \xrightarrow{+5/8} \frac{24}{8} = 3,$$

gagné !