

CAHIER DE VACANCES

Automne



au menu (quarante-cinq minutes par jour) :

Jour 1. Suites et sommes arithmétiques	1
Jour 2. Découpages et recollements	3
Jour 3. Puissances	6
Jour 4. Le théorème de Pythagore	8
Jour 5. Décimaux, rationnels et irrationnels	11
Jour 6. Identités remarquables	13
Jour 7. Nombres algébriques	15
Jour 8. Quelques outils de géométrie	16
Jour 9. Analyse	18
Jour 10. Problèmes d'optimisations géométriques	20

JOUR 1

SUITES ET SOMMES ARITHMÉTIQUES

LISTE DE LECTURE
Dimitri Chostakovitch,
Symphonie n°4 en do mineur, opus 43

On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est *arithmétique* lorsque l'écart entre chacun de ses termes est constant, autrement dit s'il existe un nombre p (qu'on appelle la *raison* de la suite) tel que pour tout indice n on a $u_{n+1} - u_n = p$. Voici un exemple :

$$u_0 = 4 \xrightarrow{+7} u_1 = 11 \xrightarrow{+7} u_2 = 18 \xrightarrow{+7} u_3 = 25 \xrightarrow{+7} u_4 = 32 \dots$$

NIVEAU 1

Soit n un indice et soit k un entier (disons positif). Pour aller de u_n à u_{n+k} , on fait k pas, c'est-à-dire $u_n + k \times p = u_{n+k}$. Appliquons ceci à $n = 0$: on obtient la formule qui donne le terme de rang k en fonction de k

$$u_k = u_0 + k \times p.$$

Question 1 — Que vaut u_{100} pour la suite ci-dessus ? Et u_{1000} ?

Question 2 — Une suite arithmétique $(v_n)_{n \geq 0}$ vérifie $v_0 = 50$ et $v_{20} = 80$. Que vaut v_{100} ? Et v_{1001} ?

Question 3 — Une suite $(w_n)_{n \geq 0}$ contient les termes $w_3 = 10$, $w_{30} = 40$ et $w_{300} = 1000$. Peut-elle être arithmétique ? Justifier la réponse.

NIVEAU 2

On reprend les mêmes notations, et on cherche à calculer la somme

$$S = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}.$$

En la ré-écrivant à l'envers et en sommant, on obtient

$$\begin{array}{rccccccccc} S & = & u_n & + & u_{n+1} & + & \dots & + & u_{n+k} \\ S & = & u_{n+k} & + & u_{n+k-1} & + & \dots & + & u_n \\ \hline 2 \times S & = & (u_n + u_{n+k}) & + & (u_{n+1} + u_{n+k-1}) & + & \dots & + & (u_{n+k} + u_n) \end{array}$$

c'est-à-dire

$$2 \times S = (k+1) \times (u_n + u_{n+k}) \quad \Leftrightarrow \quad S = \frac{(k+1) \times (u_n + u_{n+k})}{2}.$$

Question 4 — Combien y a-t-il de termes dans la somme, c'est-à-dire de u_n à u_{n+k} (en comptant celui de départ *et* celui d'arrivée, évidemment !) ?

Question 5 — Pourquoi les sommes « en colonne » sont-elles constantes, c'est-à-dire pourquoi a-t-on $u_n + u_{n+k} = u_{n+1} + u_{n+k-1} = u_{n+2} + u_{n+k-2} = \dots$?

Question 6 — Calculer $10 + 25 + 40 + 55 + 70 + 85 + \dots + 5995$.

Question 7 — Démontrer que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$.

NIVEAU 3

Exercice : somme des nombres impairs.

a) Si $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, $u_4 = 9$, etc., est la suite des nombres impairs, quelle formule donne u_n en fonction de n ?

b) Donner une expression simple de la somme des n premiers nombres impairs, c'est-à-dire de

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1).$$

Exercice : recherche de termes entiers.

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n \geq 0}$ de premier terme $u_0 = 2/3$ et de raison p .

a) On suppose $p = 1/2$. Démontrer que la suite ne contient aucun terme entier.

b) Quelles sont les valeurs de p pour lesquelles la suite contient au moins un nombre entier ?

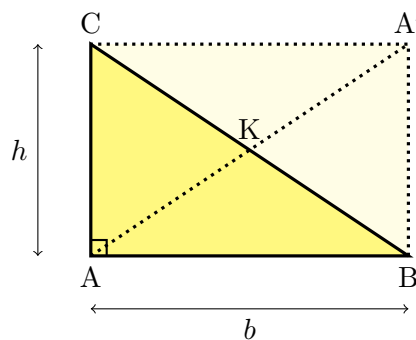
JOUR 2

DÉCOUPAGES ET RECOLLEMENTS

LISTE DE LECTURE
E.S.T.,
Tuesday wonderland

NIVEAU 1

Soit ABC un triangle rectangle en A , et soit K le milieu de son hypoténuse $[BC]$. Si s désigne la symétrie de centre K , et si $A' = s(A)$, on obtient un quadrilatère $ABA'C$ qui est un parallélogramme : en effet, $(A'C)$ est l'image de (AB) par s et lui est donc parallèle, de même que $(A'B)$ est l'image de (AC) par s et lui est donc (aussi) parallèle. Ce parallélogramme possède un angle droit, c'est donc un rectangle, et son aire est égale à $AB \times AC$.



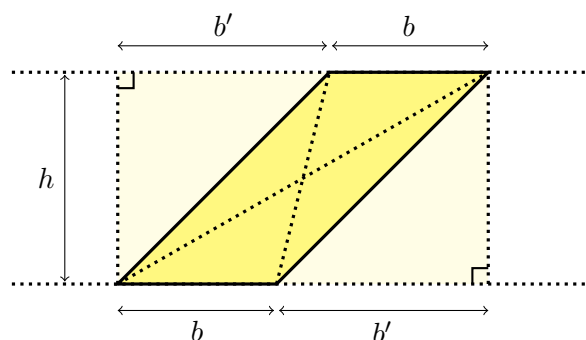
Le triangle $A'CB$ est l'image de ABC par s , ils sont donc superposables et ont la même aire, à savoir la moitié de celle du rectangle puisque

$$\mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{A'CB} = \mathcal{A}_{ABCD} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABCD} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}_{ABC} = \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{2}.$$

En notant $b = AB$ (la « base ») et $h = AC$ (la « hauteur »), on obtient, *dans le cas particulier d'un triangle rectangle*, la formule

$$\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \frac{b \times h}{2}.$$

Considérons à présent un parallélogramme. On choisit un côté qu'on appellera la *base* (et on note b sa longueur), on le prolonge à l'infini, de même que le côté qui lui est opposé. On appelle *hauteur* (du parallélogramme) la distance entre ces deux droites et on la note h . Enfin on projette perpendiculairement les « sommets qui dépassent », comme sur la figure ci-dessous, ce qui fait apparaître une troisième longueur qu'on note b' .

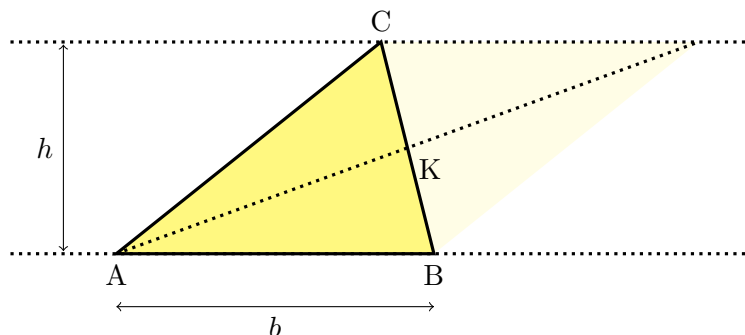


Question 1 — En utilisant une symétrie, justifier que les deux longueurs notées b' ci-dessus sont effectivement égales.

Question 2 — En remarquant que l'aire du grand rectangle qui apparaît est égale à $(b + b') \times h$, démontrer que l'aire du parallélogramme est donnée par la formule

$$\mathcal{A}_{\text{parallélogramme}} = b \times h.$$

Enfin considérons un triangle (quelconque, cette fois-ci) ABC . On note $b = AB$ et h la distance entre C et (AB) . Enfin, on note K le milieu de $[BC]$.



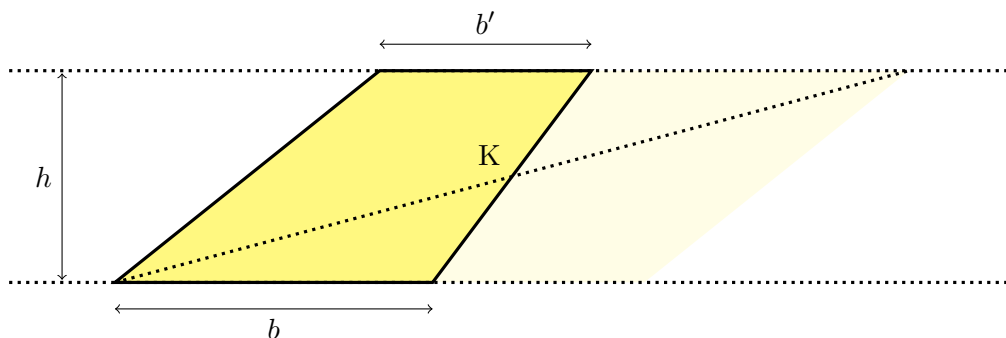
Question 3 — En utilisant une symétrie, compléter ce triangle en un parallélogramme, et en déduire la formule

$$\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \frac{b \times h}{2}$$

cette fois-ci valable pour un triangle quelconque.

NIVEAU 2

Un *trapèze* est un quadrilatère non croisé qui a deux côtés opposés parallèles. Les longueurs de ces deux côtés sont appelés *petite base* et *grande base*, selon lequel est le plus long. On les note (peu importe dans quel ordre) b et b' , et on note h la distance entre ces deux côtés (qu'on appelle la *hauteur* du trapèze).



Question 4 — Les parallélogrammes sont-ils des trapèzes ?

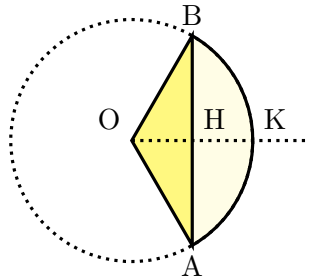
Question 5 — On note K le milieu d'un des côtés « obliques ». En utilisant une symétrie, compléter le trapèze en un parallélogramme, et en déduire la formule

$$\mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(b + b') \times h}{2}.$$

Exercice : arc, corde et flèche

On trace un cercle de centre O et de rayon R . On place deux points A et B sur le cercle, on note H le milieu de $[AB]$ et K l'intersection de $[OH]$ avec \widehat{AB} .

Rappelons le vocabulaire : $[AB]$ s'appelle la *corde* (on notera sa longueur c), \widehat{AB} s'appelle l'*arc* (on notera sa longueur ℓ) et $[HK]$ s'appelle la *flèche* (on notera sa longueur f). Enfin on notera θ la mesure de l'angle « au centre » \widehat{AOB} .



Commençons par une observation : O et K sont à égales distances de A et B , ils sont donc sur la médiatrice du segment $[AB]$. En particulier cette médiatrice est la droite (OK) et elle est donc perpendiculaire à (AB) .

Dans le triangle OHB rectangle en H , on a d'après le théorème de Pythagore

$$OH^2 + HB^2 = OB^2 \quad \Leftrightarrow \quad (R - f)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = R^2.$$

a) Exprimer c en fonction de R et f .

b) Exprimer f en fonction de R et c .

En utilisant la trigonométrie, on a aussi

$$\cos(\widehat{HOB}) = \frac{OH}{OB} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R - f}{R}$$

et

$$\sin(\widehat{HOB}) = \frac{HB}{OB} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{c/2}{R}.$$

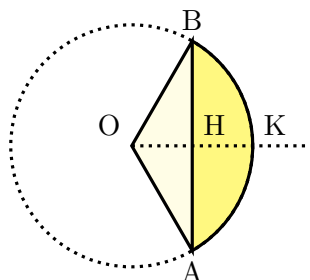
Enfin, la longueur d'un arc étant proportionnelle à l'angle au centre qui l'intercepte, on a

$$\ell = \frac{\theta}{2\pi} \times 2\pi \times R = \theta \times R.$$

c) Exprimer en fonction de θ et R l'aire de la portion de disque interceptée par l'angle \widehat{AOB} .

d) Exprimer en fonction de θ et R l'aire du triangle OAB .

e) En déduire, toujours en fonction de θ et R , l'aire de la région coloriée en jaune vif ci-dessous.



JOUR 3
PUISSANCES

LISTE DE LECTURE
Nirvana,
Nevermind

Si x est un nombre et si n est un entier strictement positif, on rappelle que x^n est le raccourci pour désigner le produit

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois le } x}.$$

En particulier, on a $x^1 = x$, $x^2 = x \times x$, et la règle $x^m \times x^n = x^{m+n}$ (« dans un produit, les exposants s'ajoutent »). Prolongeons cette définition en posant

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{et} \quad x^0 = 1,$$

de sorte que $x^{-1} = 1/x$, et que la règle $x^m \times x^n = x^{m+n}$ est désormais valable pour n'importe quels exposants $m, n \in \mathbf{Z}$ (c'est-à-dire entiers positifs ou négatifs).

Deuxième règle, qui ressemble mais qui n'a rien à voir : dans une multiplication, l'ordre des termes n'a pas d'importance. Ainsi

$$(a \times b)^n = \underbrace{a \times b \times a \times b \times \dots \times a \times b}_{n \text{ fois } a \text{ et } b} = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois } a} \times \underbrace{b \times b \times \dots \times b}_{n \text{ fois } b} = a^n \times b^n,$$

et de même

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Enfin, en combinant les deux, on obtient

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \times x^m \times \dots \times x^m}_{n \text{ fois } x^m} = x^{m+m+\dots+m} = x^{m \times n},$$

et on vérifie que cette règle est en fait valable pour les exposants négatifs aussi.

NIVEAU 1

Exercice : fractions.

Simplifier au maximum les fractions suivantes :

$$\text{a) } \frac{2^{15} \times 5^{12}}{20^{10}}, \quad \text{b) } \frac{6^8 \times 8^6}{15^6 \times 4^{10}}, \quad \text{c) } \frac{10^{10} \times 50^{12}}{25^5 \times 1000^5}, \quad \text{d) } \frac{24^9 \times 9^{24}}{27^{20} \times 32^5}.$$

NIVEAU 2

Chez les nombres positifs, les puissances établissent des *bijections* : si x est un réel positif et si n est un entier strictement positif, alors x^n est encore un réel positif, et réciproquement si y est un réel positif, il existe un

unique réel positif x tel que $x^n = y$. Ce x s'appelle la *racine n -ième* de y , et on écrit $x = \sqrt[n]{y}$. Lorsque $n = 2$ (et parce que c'est la situation qu'on rencontre le plus souvent) on écrit simplement $x = \sqrt{y}$. Par exemple

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

car $2^5 = 32$, ou encore

$$\sqrt[3]{1000} = 10$$

car $10^3 = 1000$.

Question 1 — On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est donné par la formule

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3.$$

Quel est le diamètre (en centimètres) d'une boule dont le volume est égal à 1 L ?

Question 2 — Que vaut $\sqrt{\sqrt{16}}$? Et plus généralement $\sqrt{\sqrt{x}}$?

Question 3 — Que vaut $(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b})^n$? En déduire la formule

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}.$$

Question 4 — Simplifier $\sqrt[3]{100} \times \sqrt[3]{108} \times \sqrt[3]{160}$.

NIVEAU 3

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est *géométrique* lorsque le rapport entre chaque terme est constant (et ce rapport s'appelle alors la *raison*, comme pour les suites arithmétiques, même si ça n'a rien à voir). Voici un exemple :

$$u_0 = 2 \xrightarrow{\times 3} u_1 = 6 \xrightarrow{\times 3} u_2 = 18 \xrightarrow{\times 3} u_3 = 54 \xrightarrow{\times 3} u_4 = 112 \dots$$

Question 5 — Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison q , que vaut u_{10}/u_5 ?

Question 6 — Une suite géométrique $(v_n)_{n \geq 0}$ contient les termes $v_4 = 8$ et $v_6 = 10$. Que valent v_8 et v_9 ?

Exercice : notes de musique.

En musique, chaque note correspond à une fréquence (bon en fait il y a une fondamentale et des harmoniques, mais restons simples). On appelle *octave* l'intervalle entre deux notes dont les fréquences f et f' vérifient $f'/f = 2$. Par exemple, si un la a pour fréquence 440 Hz, alors le la « suivant » (sur le clavier d'un piano) aura pour fréquence $2 \times 440 \text{ Hz} = 880 \text{ Hz}$.

a) En musique occidentale, on utilise le tempérament égal dans une échelle à douze sous-intervalles. Cela veut dire que chaque octave est divisée en douze sous-intervalles (ce sont les touches blanches et noires du piano, il y en a douze par octave), et que le rapport de fréquences $q = f'/f$ entre deux notes consécutives de cette échelle est constant. Que vaut q^{12} ? Et donc q ? *Petite indication pour les sceptiques* : sur la calculatrice, il y a une touche (ou un menu) pour les racines n -ièmes.

b) Le do central d'un piano est situé neuf notes avant le la à 440 Hz. Calculer la fréquence correspondante à ce do.

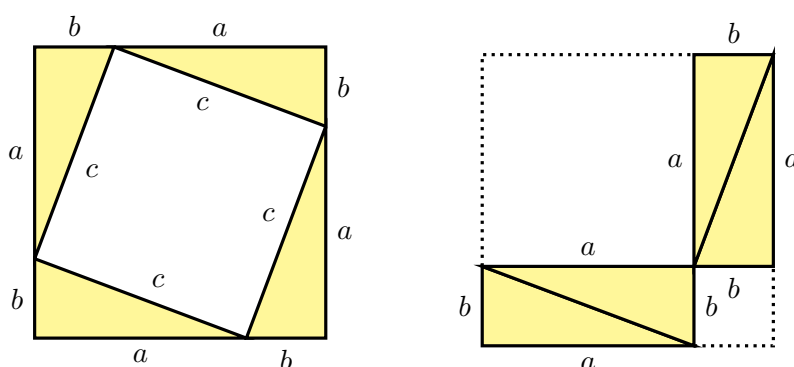
JOUR 4

LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

LISTE DE LECTURE
Ernest Bloch,
Symphonie en do dièse mineur

NIVEAU 1

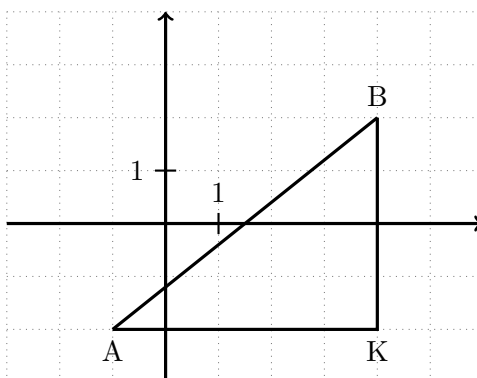
On considère un triangle rectangle, dont l'hypoténuse mesure c et les deux autres côtés (qui s'appellent les *cathètes*) mesurent a et b . Avec quatre exemplaires de ce triangle, on construit deux figures, que voici, que voilà.



Question 1 — Sur la figure de gauche, le quadrilatère incliné a quatre côtés de même longueur (c'est donc un losange), mais c'est en fait un carré : pourquoi ses angles sont-ils droits ? Pour le démontrer on a besoin de savoir que certaines choses mesurent 180° : par exemple les angles plats, ou encore la somme des angles d'un triangle.

Question 2 — Dédurre de ces deux figures que $a^2 + b^2 = c^2$ (c'est le théorème de Pythagore : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés).

Voyons une application de cette formule, pour les coordonnées. Dans un repère orthonormé, on considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. On a aussi fait apparaître un point $K(x_K; y_K)$, choisi de tel manière que (AK) soit parallèle à l'axe des abscisses et (KB) parallèle à l'axe des ordonnées.



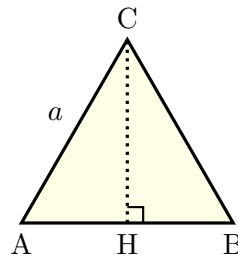
Question 3 — Selon que K est à gauche ou à droite de A (sur le dessin il est à droite, mais ne nous arrêtons pas à un cas particulier), on a $AK = x_B - x_A$ ou $AK = x_A - x_B$. Dans tous les cas, que vaut AK^2 ? De même, que vaut KB^2 ?

Question 4 — En déduire la formule de la distance euclidienne :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

NIVEAU 2

Soit a un nombre positif. On considère un triangle équilatéral de côté a . On a fait apparaître une hauteur, qui dans un tel triangle est aussi une médiane, une médiatrice, une bissectrice, tout ça à la fois. En particulier, on a $AH = HB = a/2$.

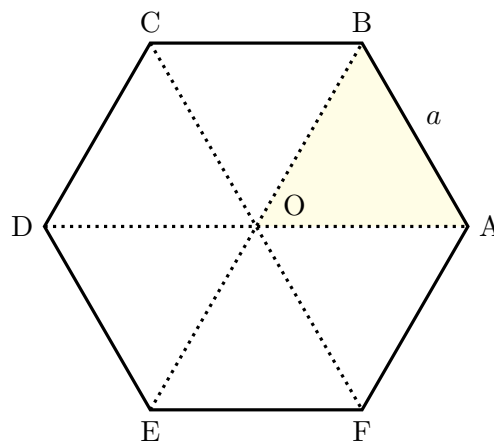


Question 5 — Exprimer en fonction de a la hauteur de ce triangle. Une observation qui peut être utile :

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = a \times \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = a \times \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Question 6 — En déduire que l'aire d'un triangle équilatéral de côté a vaut $a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$. On prendra bien garde au 4, qui n'est subitement plus dans la racine.

Maintenant, considérons un hexagone régulier de côté a . Le voici ; on a tracé ses grandes diagonales.



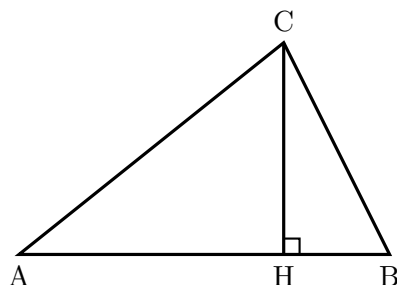
Question 7 — La somme des angles d'un triangle vaut 180° . Que vaut la somme des angles d'un quadrilatère ? Et plus spécifiquement, que valent chacun des angles du quadrilatère ABCD (sachant que toutes les grandes diagonales de l'hexagone sont des axes de symétrie) ?

Question 8 — Justifier que les six petits triangles qui apparaissent sont tous équilatéraux.

Question 9 — En déduire la formule qui donne, en fonction de son côté a , l'aire d'un hexagone régulier.

Exercice : la formule d'Al-Kashi.

On considère un triangle ABC. On note H le pied de la hauteur issue de C (on suppose pour simplifier que H est sur le segment [AB]).



- a) Justifier que $HC^2 = AC^2 - AH^2$.
- b) Puis que $HB^2 = AB^2 + AH^2 - 2 \times AB \times AH$.
- c) En déduire que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AH$.

En écrivant plutôt $AH = AC \times \cos(\hat{A})$, on obtient la *formule d'Al-Kashi*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A})$$

qu'on peut voir comme une généralisation du théorème de Pythagore au cas d'un triangle quelconque. Elle reste vraie si H est en dehors du segment [AB].

DÉCIMAUX, RATIONNELS ET IRRATIONNELS

LISTE DE LECTURE
Taylor Swift,
1989 (Taylor's version)

NIVEAU 1

On dit qu'un nombre x est *rationnel* lorsqu'on peut l'écrire comme une fraction d'entiers, c'est-à-dire lorsqu'il existe $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$ tels que $x = a/b$.

Quelques petits rappels sur les ensembles de nombres : l'ensemble de tous les nombres se note \mathbf{R} , celui des nombres rationnels se note \mathbf{Q} , celui des entiers (« relatifs ») est

$$\mathbf{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

et parmi eux on distingue les entiers *naturels*

$$\mathbf{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

et les entiers strictement positifs

$$\mathbf{N}^* = \{1; 2; 3; 4; \dots\}.$$

La première chose à voir est qu'il existe des nombres qui ne sont pas rationnels. Le premier exemple est $\sqrt{2}$. Pour prouver qu'il n'est pas rationnel, on fait une démonstration *par l'absurde* : cela consiste à supposer qu'il est rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit $\sqrt{2} = a/b$, et à déduire une contradiction de cette hypothèse. Quitte à la simplifier, on peut même supposer que cette fraction est *irréductible*.

Question 1 — Si n est un entier, justifier que n et n^2 ont toujours la même parité (c'est-à-dire sont tous les deux pairs, ou bien tous les deux impairs).

Question 2 — En développant $(2 \times k)^2$, justifier que si n est un nombre pair, alors son carré est un multiple de quatre.

Question 3 — On est parti d'une fraction irréductible a/b égale à $\sqrt{2}$: on a donc $2a^2 = b^2$. Démontrer que b est pair. Puis que a est pair. En quoi cela constitue-t-il une contradiction ?

NIVEAU 2

On dit qu'un nombre x est *décimal* si on peut l'écrire comme une fraction a/b , avec $a \in \mathbf{Z}$ et b une puissance de dix, c'est-à-dire

$$b \in \{1; 10; 100; 1\,000; 10\,000; \dots\}.$$

Leur ensemble se note \mathbf{D} .

Question 4 — Est-ce que $x = 26/20$ est un nombre décimal ?

Question 5 — Justifier que tous les nombres décimaux sont rationnels : autrement dit qu'on a l'inclusion d'ensembles $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{Q}$.

Reste à vérifier que l'inclusion réciproque est fausse, autrement dit qu'il existe des nombres rationnels qui ne sont pas décimaux. Notre cible est $x = 1/3$.

Question 6 — On procède par l'absurde et on suppose que $1/3$ est un nombre décimal, c'est-à-dire qu'il existe un entier $a \in \mathbf{Z}$ et un entier $p \in \mathbf{N}$ tels que

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}.$$

Cela implique (avec un produit en croix) $3 \times a = 10^p$, et donc en particulier que 10^p est un multiple de 3. Expliquer pourquoi c'est impossible.

NIVEAU 3

Restons sur les nombres décimaux. Parce qu'une division par une puissance de dix revient à décaler la virgule, les nombres décimaux possèdent un développement décimal avec un nombre *fini* de chiffres « après la virgule » :

$$\frac{31\,416}{10\,000} = 3,141\,6.$$

Réciproquement (et par le même procédé) les nombres qui ont un développement décimal avec un nombre fini de chiffres après la virgule sont décimaux.

Ce qu'on va voir ici, c'est que les nombres décimaux ont en fait un deuxième développement décimal, avec une infinité de chiffres, avec « que des 9 » à partir d'un moment. Prenons par exemple $3/4 = 0,75$ et montrons qu'il est aussi égal à $0,749\,999\,999\dots$

Question 7 — Soit $x = 0,749\,999\,999\dots$. Comparer $100x - 74$ et $x + 1/4$.

Question 8 — En résolvant l'équation $100x - 74 = x + 1/4$, démontrer qu'on a bien $x = 3/4$.

Plus généralement, considérons un nombre de la forme

$$x = \frac{a}{10^p} + \frac{0,999\,999\,999\dots}{10^p},$$

avec $a \in \mathbf{N}$ et $p \in \mathbf{N}$.

Question 9 — Que vaut x lorsque $a = 75$ et $p = 2$?

Question 10 — Dans le cas général, démontrer que x est un nombre décimal, et plus précisément qu'il est en fait égal à

$$\frac{a+1}{10^p}.$$

JOUR 6

IDENTITÉS REMARQUABLES

LISTE DE LECTURE
Arnold Bax,
Symphonie n°3

NIVEAU 1

Les deux premières identités remarquables, lorsqu'on les utilise pour factoriser, s'écrivent

$$a^2 \pm 2 \times a \times b + b^2 = (a \pm b)^2.$$

Lorsque le membre de gauche est incomplet (soit il n'y a pas le b^2 , soit il y a quelque chose, mais *qui n'est pas b^2*), on peut ajuster :

$$x^2 + 3x + 5 = x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{2} + 5$$

donc $a = x$ et $b = 3/2$, or on a 5 et pas $(3/2)^2 = 9/4$, qu'à cela ne tienne :

$$x^2 + 3x + 5 = x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 5 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4},$$

puisque $5 = 20/4$ et que $-9/4 + 20/4 = 11/4$.

Question 1 — Factoriser $4x^2 + 12x + 9$.

En pratique, lorsqu'il y a un coefficient devant le x , on le met dès le départ en facteur :

$$2x^2 + 8x + 15 = 2 \times \left(x^2 + 4x + \frac{15}{2}\right),$$

et ensuite on cherche une identité remarquable, complète ou incomplète, dans la grande parenthèse. Ici on trouve

$$2 \times \left(x^2 + 4x + \frac{15}{2}\right) = 2 \times \left(x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2 + \frac{15}{2}\right) = 2 \times \left((x + 2)^2 + \frac{7}{2}\right).$$

Question 2 — Expliquer d'où sort le $7/2$.

Enfin, on termine en redistribuant le 2 mis en facteur, ce qui donne ici

$$2x^2 + 8x + 15 = 2 \times \left((x + 2)^2 + \frac{7}{2}\right) = 2 \times (x + 2)^2 + 7.$$

C'est ce qu'on appelle la *mise sous forme canonique* du trinôme. C'est la forme la plus simple, car x n'y apparaît qu'une seule fois.

Question 3 — Mettre sous forme canonique $3x^2 - 18x + 10$.

NIVEAU 2

Parlons d'*équation de cercle*. Dans un repère orthonormé, on considère deux points $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et $M(x; y)$ (le premier étant fixe et le second ayant vocation à bouger) et un réel positif R . Si \mathcal{C} désigne le cercle de centre Ω et de rayon R , on a

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2.$$

C'est ce qu'on appelle l'*équation* du cercle.

Question 4 — Montrer que pour $\Omega(2; -3)$ et $R = 3$ on obtient l'équation $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0$.

Question 5 — Inversement, retrouver x_Ω , y_Ω et R pour l'équation $x^2 - 4x + y^2 - 10y + 4 = 0$. On cherchera à compléter l'identité remarquable commençant par $x^2 - 4x$ et celle commençant par $y^2 - 10y$.

Question 6 — Quelles sont les valeurs du réel k pour lesquelles l'ensemble défini par l'équation

$$x^2 + 5x + y^2 - 3y + k = 0$$

n'est pas vide ?

NIVEAU 3

Il s'agit d'utiliser la troisième identité remarquable

$$(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$$

pour simplifier des fractions faisant intervenir des racines carrées. La formule ci-dessus montre que si a (ou b , ou les deux) fait (ou font, donc) intervenir une racine carrée, multiplier l'une des deux quantités $a - b$ ou $a + b$ par l'autre donne une quantité qui *n'a plus* de racine carrée. Voyons un exemple :

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{1 \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

puisque $(\sqrt{3})^2 = 3$ et $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Exercice : simplification d'expressions radicales

Transformer les expressions suivantes de sorte que plus aucune racine carrée n'intervienne *sous* une barre de fraction :

a) $\frac{1}{\sqrt{5}},$

b) $\frac{1}{1 + \sqrt{6}},$

c) $\frac{1 + \sqrt{7}}{2 + \sqrt{7}},$

d) $\frac{2 + \sqrt{8}}{3 + \sqrt{8}}.$

Question 7 — Peut-on faire aussi bien avec $\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}}$?

JOUR 7

NOMBRES ALGÈBRIQUES

LISTE DE LECTURE
Hooverphonic,
In wonderland

NIVEAU 1

Question 1 — Résoudre l'équation $x^2 - 2\sqrt{3} \times x + 1 = 0$.

Question 2 — Plus généralement, pour un entier $n \geq 1$, résoudre l'équation $x^2 - 2\sqrt{n} \times x + 1 = 0$.

NIVEAU 2

On considère les nombres $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\beta = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Question 3 — Que valent $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ et $\alpha \times \beta$?

Question 4 — Que valent donc $(\alpha + \beta)^2$ et $(\alpha - \beta)^2$?

Question 5 — Comment en déduire simplement la valeur de $\alpha^2 + \beta^2$?

NIVEAU 3

On dit qu'un nombre x est *algébrique* s'il est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers. Depuis le début de cette fiche, on parle de $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\alpha = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ qui sont solutions de l'équation $x^2 - 2 \times \sqrt{3} \times x + 1 = 0$. Elle *n'est pas* à coefficients entiers. Ce qui ne veut pas dire qu'il n'existe pas une autre équation, elle à coefficients entiers, dont ils sont solutions. On va précisément voir que c'est le cas.

Question 6 — Calculer α^2 . En déduire que α est solution de l'équation $(x^2 - 5)^2 = 24$. Quel est le degré de cette équation ?

Question 7 — Trouver une équation à coefficients entiers satisfaite par β .

JOUR 8

QUELQUES OUTILS DE GÉOMÉTRIE

LISTE DE LECTURE
Éliane Radigue,
L'île re-sonante

NIVEAU 1

Soient A, B et C trois points du plan.

Question 1 — On suppose que A et B sont confondus. Justifier que $AB \leq AC + CB$. Quel est le seul point C pour lequel on a $AB = AC + CB$?

Ce cas étant écarté, on supposera désormais que A et B ne sont pas confondus. Ils définissent donc une droite (AB), et sur cette droite on peut construire le point H, projeté orthogonal de C. Il peut se trouver à trois endroits : sur [AB], de l'autre côté de B par rapport à A, ou de l'autre côté de A par rapport à B.

Question 2 — Faire trois dessins, chacun correspondant à l'une des trois situations.

Question 3 — On suppose que H est en dehors du segment [AB], et que A, B et H sont dans cet ordre. À l'aide du théorème de Pythagore, justifier les inégalités suivantes :

$$AB^2 < AH^2 \leq AC^2.$$

En déduire que $AB < AC + CB$.

Question 4 — De la même manière, si H est en dehors du segment [AB] mais avec H, A et B dans cet ordre, démontrer qu'on a (encore) $AB < AC + CB$.

Question 5 — Enfin on suppose que $H \in [AB]$. Démontrer successivement que $AH \leq AC$, que $HB \leq CB$, et enfin que $AB \leq AC + CB$. Où faut-il placer le point C pour avoir l'égalité $AB = AC + CB$?

On a donc démontré l'*inégalité triangulaire* : quels que soient les points A, B et C, on a $AB \leq AC + CB$, et l'inégalité est stricte sauf lorsque C est sur le segment [AB]. Autrement dit, passer par le point C pour aller de A à B rallonge le chemin, sauf si C est sur le segment de droite reliant A à B.

NIVEAU 2

Dans le plan \mathcal{P} on considère deux points non confondus A et B. On appelle *médiatrice* du segment [AB] l'ensemble des points qui sont à égale distance de A et B, c'est-à-dire

$$\{M \in \mathcal{P} \mid AM = BM\}.$$

Nous allons démontrer que cet ensemble est une droite, et plus précisément que c'est la droite qui coupe $[AB]$ perpendiculairement en son milieu. Pour faire cette démonstration, appelons Δ la médiatrice de $[AB]$, I le milieu de $[AB]$, et \mathcal{D} la perpendiculaire à (AB) passant par I . Il faut démontrer que $\Delta = \mathcal{D}$, et pour cela on procède par double-inclusion, c'est-à-dire qu'on va démontrer d'une part que $\Delta \subseteq \mathcal{D}$ et d'autre part que $\mathcal{D} \subseteq \Delta$.

Question 6 — Justifier que la conjonction ($\mathcal{D} \subseteq \Delta$ et $\Delta \subseteq \mathcal{D}$) est équivalente à $\mathcal{D} = \Delta$. La *conjonction*, c'est le mot pour désigner une phrase qui contient deux propositions reliées par le mot *et* (à la différence d'une *disjonction* qui elle relie les propositions par le mot *ou*).

Question 7 — Soit $M \in \Delta$. Justifier que les triangles AIM et BIM sont semblables, et en déduire que les angles \widehat{AIM} et \widehat{BIM} sont droits. Ceci prouve que $(IM) \perp (AB)$, c'est-à-dire $M \in \mathcal{D}$, donc l'inclusion $\Delta \subseteq \mathcal{D}$.

Question 8 — Soit $M \in \mathcal{D}$. Calculer AM et BM à l'aide du théorème de Pythagore, et en déduire qu'ils sont égaux. Ceci prouve que $M \in \Delta$, donc l'inclusion $\mathcal{D} \subseteq \Delta$.

NIVEAU 3

On considère maintenant un triangle non aplati ABC . On note $\mathcal{D}_{A,B}$, $\mathcal{D}_{B,C}$ et $\mathcal{D}_{C,A}$ les médiatrices respectives des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

Question 9 — Justifier que $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{B,C}$ ne sont pas parallèles. On procédera par l'absurde et on utilisera les règles sur les droites parallèles (par exemple : « si \mathcal{D} est une droite et si M est un point, il existe une unique perpendiculaire à \mathcal{D} passant par M », ou encore : « si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre »).

Puisque $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{B,C}$ ne sont pas parallèles, elles se coupent en un point, appelons-le O .

Question 10 — Démontrer que $O \in \mathcal{D}_{C,A}$, et en déduire que les trois droites $\mathcal{D}_{A,B}$, $\mathcal{D}_{B,C}$ et $\mathcal{D}_{C,A}$ sont concourantes.

Question 11 — Qu'appelle-t-on *cercle circonscrit* à un triangle ?

JOUR 9
ANALYSE

LISTE DE LECTURE
Hania Rani,
Ghosts

NIVEAU 1

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = x^3 - 5x - 7$.

Question 1 — Construire un tableau de valeurs de f pour x allant de -3 à 3 . Ça commence comme ça, on choisira une dizaine de valeurs.

x	-3	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	3
$f(x)$											

Question 2 — À partir de ce tableau, construire la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

NIVEAU 2

Dans cette partie, on pourra utiliser une calculatrice graphique, un tableur ou Python pour faire les calculs. On reprend la fonction f de la partie précédente, et on cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Question 3 — À l'aide de la courbe, expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ semble n'avoir qu'une seule solution, et pourquoi cette solution semble se trouver entre 2 et 3 .

Avec l'un des outils numériques susmentionnés, on effectue un *balayage* des valeurs de $f(x)$, pour x allant de 2 à 3 , avec un pas de $0,1$. Voici ce que ça a de l'air (en colonne pour changer).

x	$f(x)$
2,0	$-9,0$
2,1	$-8,239$
2,2	$-7,352$
2,3	$-6,333$
2,4	$-5,176$
2,5	$-3,875$
2,6	$-2,424$
2,7	$-0,817$
2,8	$0,952$
2,9	$2,889$
3,0	$5,0$

Question 4 — Pourquoi peut-on maintenant affirmer que la solution se trouve entre $2,7$ et $2,8$?

Question 5 — Recommencer entre ces deux valeurs, avec un pas de 0,01 cette fois, ce qui va donner un nouvel encadrement ; et poursuivre ainsi jusqu'à obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-5} de la solution.

NIVEAU 3

On conserve la même fonction f .

Question 6 — À partir de la courbe, combien l'équation $f(x) = -6$ semble-t-elle avoir de solutions ?

Question 7 — En ré-utilisant la technique du balayage, trouver une valeur approchée à 10^{-5} près de chacune de ces solutions.

PROBLÈMES D'OPTIMISATIONS GÉOMÉTRIQUES

LISTE DE LECTURE
Jean Barraqué,
La sonate pour piano

NIVEAU 1

On considère un rectangle dont le périmètre est 150 cm. On cherche quelle doit être sa forme pour que son aire soit maximale.

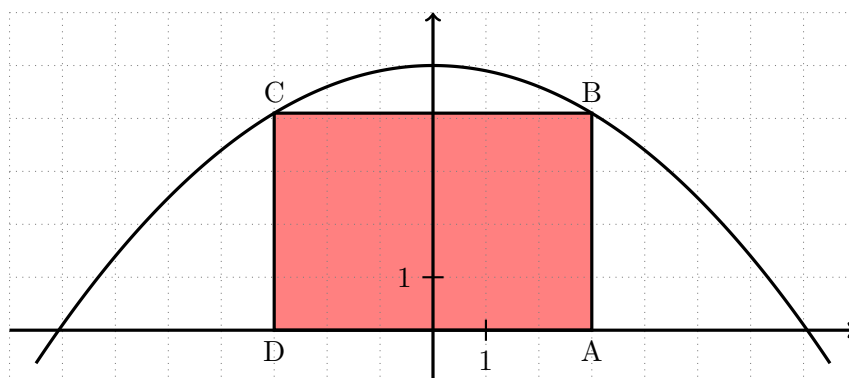
Question 1 — On note x une des dimensions du rectangle. Justifier que l'autre dimension est $75 - x$.

Question 2 — En déduire l'aire $\mathcal{A}(x)$ de ce rectangle, qui est donc une fonction de x .

Question 3 — Dresser le tableau des variations de $-x^2 + 75x$, puis conclure.

NIVEAU 2

Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative de la fonction $f(x) = 5 - \frac{x^2}{10}$. C'est une parabole ; la voici.



On a également placé un point $A(x; 0)$ à une certaine abscisse $x \in [0; \sqrt{50}]$, et on a complété en un rectangle avec les points $B(x; f(x))$, $C(-x; f(x))$ et $D(-x; 0)$.

Question 4 — Exprimer en fonction de x les longueurs AD et AB.

Question 5 — Justifier que l'aire de ABCD est donnée par la fonction $\mathcal{A}(x) = 10x - x^3/5$.

Question 6 — Tracer la courbe représentative de $\mathcal{A}(x)$ dans un repère orthogonal, pour x allant de 0 à $\sqrt{50}$. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ?

Question 7 — Pourquoi est-ce qu'on parle de $\sqrt{50}$ depuis le début ?

NIVEAU 3

Question 8 — On place trois points A, B et C sur un cercle. Démontrer que le périmètre du triangle ABC est maximal lorsque ce triangle est équilatéral.